

Η κατανόηση των πρώτων διαιρετικών σχέσεων από τα παιδιά

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γενικά αποδεκτό σήμερα ότι οι απαρχές κατανόησης των αριθμητικών πράξεων βρίσκονται στα σχήματα δράσης των παιδιών. Τα παιδιά δομούν τα σχήματα δράσης τους μέσα στο πλαίσιο της καθημερινής τους ενασχόλησης με ποσότητες, πολύ πριν διδαχθούν τις σχετικές αριθμητικές έννοιες και πράξεις στο σχολείο. Οι αριθμητικές πράξεις καθ' αυτές είναι διαφορετικές από τα σχήματα δράσης, πρώτον, γιατί οι πράξεις γίνονται με αριθμούς, οι οποίοι δεν είναι παρά συμπτυγμένες αναπαραστάσεις των αντικειμένων. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5 είναι μια περιληπτική αναπαράσταση 5 αντικειμένων. Δεύτερον, οι αριθμητικές πράξεις απαιτούν τη χρήση συμβόλων, όπως τα $+$, $-$, $\times$, $:$ και $=$. Με τα σχήματα δράσης τους όμως τα παιδιά μπορούν να λύσουν μια ποικιλία αριθμητικών προβλημάτων, προτού να μπορούν να λύσουν τα ίδια προβλήματα με καθαρά αριθμητικές πράξεις. Έτσι για παράδειγμα, τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας μπορούν να λύσουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ενώνοντας ή χωρίζοντας αριθμητικά σύνολα με τη βοήθεια μικρών κύβων, προτού διδαχθούν τις αντίστοιχες πράξεις στο σχολείο, προτού ακόμα μπορέσουν και τα ίδια να ονομάσουν την πράξη που πρέπει να κάνουν, για να βρουν το τελικό αποτέλεσμα (Carpenter & Moser 1982, Hudson 1983, Hughes 1986, Riley, Greeno & Heller 1983).

Για ποιο λόγο όμως τα σχήματα δράσης αποτελούν τη βάση για την κατανόηση των αριθμητικών πράξεων; Τα σχήματα δράσης συμβάλλουν στην κατανόηση των αριθμητικών πράξεων, επειδή οι σταθερές (the invariants) των αριθμητικών πράξεων είναι οι ίδιες με τις σταθερές των σχημάτων δράσης για τις αντίστοιχες πράξεις. Για παράδειγμα, όταν ένα παιδί λύνει ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού, είτε το λύνει με την πολλαπλασιαστική πράξη (3 κουτιά $\times$ 5 καραμέλες), είτε κάνοντας αντιστοιχίες (τρεις 5άδες). Και στις δύο περιπτώσεις υπονοείται η κατανόηση μιας σημαντικής σταθεράς του πολλαπλασιασμού, της σχέσης πολλαπλής αντιστοιχίας ανάμεσα στα δύο σύνολα, δηλαδή ότι σε καθένα κουτί αντιστοιχούν 5 καραμέλες.

Επειδή τα σχήματα δράσης αφορούν πράξεις επί των αντικειμένων και αλλαγές επί των μεταξύ τους σχέσεων (ενώνω, χωρίζω, θέτω σε αντιστοιχία ή μοιράζω αντικείμενα), είναι πιθανόν τα παιδιά να μπορούν να κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων πριν μπορέσουν να εκφράσουν ποσοτικά αυτές τις σχέσεις μέσω των πράξεων. Οι Resnick & Singer (1993) κάνουν λόγο για τα «πρώτα ποσοτικά σχήματα δράσης» των παιδιών (protoquantitative schemas of action), γιατί τα παι-

διά μπορούν να συσχετίζονται μεταξύ τους ποσότητες με ποσοτικούς και συγκριτικούς (πολύ, περισσότερο) αλλά μη αριθμητικούς όρους. Παρομοίως, οι Rittle-Johnson & Siegler (1998) κάνουν ιδιαίτερο λόγο για την ικανότητα των παιδιών να αντιλαμβάνονται ποσοτικές σχέσεις και έννοιες (conceptual knowledge), πριν μπορέσουν να κάνουν τις ανάλογες αριθμητικές πράξεις (procedural knowledge).

Αν και υπάρχει αρκετή έρευνα για το πώς η κατανόηση των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης πηγάζει από τα σχήματα δράσης των παιδιών, οι απόψεις για τις απαρχές κατανόησης της διαίρεσης δίστανται. Ο Piaget (1965) όρισε τη διαίρεση ως πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού. Επομένως, η κατανόηση της διαίρεσης είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτή του πολλαπλασιασμού. Από την άλλη, οι Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985) διαχωρίζουν ανάμεσα σε δύο είδη διαίρεσης με διαφορετικές απαρχές: τη διαίρεση ως μερισμό (partitive division) και τη διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση (quotitive division). Στη διαίρεση ως μερισμό μία ποσότητα μοιράζεται ανάμεσα σε ένα αριθμό αποδεκτών και ο άγνωστος είναι το μέγεθος του κάθε μεριδίου. Για παράδειγμα, εάν 3 παιδιά μοιραστούν 15 μήλα, πόσα μήλα θα πάρει το κάθε παιδί; Στη διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση δίνεται το μέγεθος της ποσότητας που είναι να μοιραστεί, το μέγεθος του κάθε μεριδίου και ο άγνωστος αναφέρεται στο πόσα τέτοια μερίδια μπορούν να σχηματιστούν. Για παράδειγμα, εάν έχουμε 15 λουλούδια και βάλουμε 3 σε κάθε βάζο, πόσα βάζα μπορούμε να γεμίσουμε; Οι Fischbein et al. (1985) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η διαίρεση ως μερισμός έχει τις ρίζες της στο σχήμα του μερισμού, αλλά η διαίρεση ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεση δεν συνδέεται με κανένα σχήμα δράσης και γίνεται κατανοητή μόνο μετά από σχετική διδασκαλία.

Υπάρχει κάθε λόγος να συνδέουμε τις απαρχές κατανόησης της διαίρεσης με το σχήμα δράσης του μερισμού (the sharing schema of action). Σχετικές μελέτες έχουν δείξει ότι ήδη από την ηλικία των 4-5 ετών τα παιδιά μπορούν να μοιράζουν δίκαια μεταξύ τους αντικείμενα, όπως καραμέλες, μολύβια κλπ. (Davis & Pepper 1992, Davis & Pitkethly 1990, Desforjes & Desforjes 1980, Frydman & Bryant 1988, Hunting & Davis 1991). Μπορούν ακόμα και να τροποποιούν τη διαδικασία του μοιράσματος, όταν μοιράζονται μεταξύ τους άνισες ποσότητες, για να καταλήξουν σε ίσα μερίδια. Έτσι οι Frydman & Bryant (1988) έδειξαν ότι τα παιδιά θα δώσουν 2 καραμέλες στην κούκλα που τρώει μόνο μονές καραμέλες, ενώ θα δώσουν 1 καραμέλα στην κούκλα που τρώει μόνο διπλές καραμέλες, για να καταλήξουν στο τέλος να έχουν και οι δύο ίσα μερίδια.

Επειδή, λοιπόν, και στο σχήμα του μερισμού και στην πράξη της διαίρεσης μία ποσότητα μοιράζεται σε ίσα μέρη, μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι μόλις το παιδί μάθει να μοιράζει σωστά, τότε πλέον έχει κατακτήσει την έννοια της διαίρεσης. Το ερώτημα που τίθεται, λοιπόν, είναι ποιες είναι οι διαφορές ανάμεσα στη διαίρεση και την πράξη του μοιράσματος.

Οι Correa, Nunes & Bryant (1998) έδειξαν ότι αν και το σχήμα του μερισμού οδηγεί σταδιακά στην κατανόηση της διαίρεσης, ωστόσο υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στα δύο. Όταν το παιδί μοιράζει, η προσοχή του είναι στραμμένη σε

μία σχέση, εκείνη της αντιστοιχίας ένα-προς-ένα. Το παιδί φροντίζει να δίδει σε κάθε αποδέκτη την ίδια ποσότητα (ένα στον Α, ένα στο Β, ένα στον Α κλπ.) με σκοπό να εξασφαλίσει ίσα μερίδια. Στην πράξη όμως της διαίρεσης το παιδί καλείται να κατανοήσει τη σχέση ανάμεσα σε τρεις όρους: το διαιρετέο, το διαιρέτη και το ηλίκο. Στη διαίρεση υπάρχει μια ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρετέο και το ηλίκο. Όσο πιο μεγάλη είναι η διαιρετέα ποσότητα, τόσο πιο μεγάλα θα είναι και τα μερίδια, αρκεί ο διαιρέτης να είναι σταθερός. Από την άλλη, υπάρχει μια αντιστρόφως ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο. Όσο πιο πολλοί μοιράζονται μια ποσότητα, τόσο πιο μικρό μερίδιο θα πάρει ο καθένας, αρκεί ο διαιρετέος να είναι σταθερός. Οι Correa, Nunes & Bryant (1998) υπέθεσαν ότι το να ξέρει κανείς να μοιράζει δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι κατανοεί και τις σχέσεις ανάμεσα στους τρεις παραπάνω όρους. Για να το αποδείξουν, ζήτησαν από παιδιά ηλικίας 5-7 ετών, που ήξεραν να μοιράζουν, να συγκρίνουν τα ηλίκα δύο διαιρέσεων μερισμού, όπως, για παράδειγμα, σε ποια περίπτωση τα αρκουδάκια θα έτρωγαν περισσότερες καραμέλες, όταν οι 12 καραμέλες θα μοιράζονταν ανάμεσα σε 2 αρκουδάκια ή ανάμεσα σε 4 αρκουδάκια. Βρέθηκε ότι, ενώ όλα τα παιδιά μπορούσαν να μοιράζουν, μόνο το 30% από τα πεντάχρονα, το 55% από τα εξάχρονα και το 85% από τα επτάχρονα έδιδαν σωστές απαντήσεις. Η ανάλυση των απαντήσεων που δόθηκαν έδειξε ότι τα περισσότερα από τα παιδιά που απάντησαν λάθος, αντί να εφαρμόσουν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο, θεώρησαν ότι όσο πιο πολλοί μοιράζονται κάτι, τόσο πιο πολύ μερίδιο θα πάρει ο καθένας. Μικρότερα ποσοστά επιτυχίας βρέθηκαν σε μία δεύτερη μελέτη τους (Correa, Nunes & Bryant 1998), όταν σε μια ομάδα διαφορετικών παιδιών της ίδιας ηλικίας δόθηκαν προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Σε αυτή την περίπτωση τα παιδιά έπρεπε να συγκρίνουν ποιο γουρουνάκι θα κερνούσε περισσότερους φίλους του, αυτό που είχε 12 καραμέλες και τις μοίραζε ανά 2 σε κάθε φίλο του ή αυτό που είχε 12 καραμέλες και τις μοίραζε ανά 3 στον καθένα. Η εφαρμογή της απευθείας ανάλογης αντί της αντιστρόφως ανάλογης σχέσης ανάμεσα στους όρους ήταν και πάλι η βασική αιτία των λανθασμένων απαντήσεων. Παρόμοια ποσοστά επίδοσης βρέθηκαν, όταν ζητήθηκε από τα παιδιά να σκεφτούν για την σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο σε προβλήματα με ασυνεχείς ποσότητες, που το ηλίκο τους εκφράζεται σε κλάσμα (Kornilaki & Nunes 1997).

Παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν τα παιδιά, οι προαναφερόμενες μελέτες έδειξαν ότι ένα μικρό, αρχικά, αλλά σημαντικό ποσοστό παιδιών κατανοεί κάποιες διαιρετικές σχέσεις. Η επιτυχία των παραπάνω παιδιών γίνεται ακόμα πιο σημαντική, αν λάβουμε υπόψη μας ότι τα παιδιά αυτά δεν είχαν εισαχθεί στην πράξη της διαίρεσης στο σχολείο. Η ηλικία των 5 ετών φαίνεται να είναι εκείνη κατά την οποία αρχίζει να αναπτύσσεται η κατανόηση των διαιρετικών σχέσεων, ενώ μέχρι την ηλικία των 7 ετών η κατανόηση αυτή δείχνει να έχει ολοκληρωθεί.

Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στην κατανόηση των διαιρετικών σχέσεων από παιδιά ηλικίας 5 ετών. Οι έρευνες των Correa, Nunes & Bryant (1998) και Kornilaki & Nunes (1997) έχουν δείξει ότι τα μικρά παιδιά, αν και μπορούν να κάνουν δίκαιες μοιρασιές μεταξύ τους, έχουν δυσκολία στην κατανόηση της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στο διαιρετό και το πηλίκο. Είναι όμως πιθανόν τα παιδιά να κατανοούν κάποιες άλλες απλούστερες διαιρετικές σχέσεις, πριν μπορέσουν να κατανοήσουν την παραπάνω αντίστροφη σχέση. Μια από αυτές τις σχέσεις είναι η ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρετό και το πηλίκο. Η επίδοση των παιδιών στην κατανόηση της ανάλογης αυτής σχέσης αναμένεται να είναι καλύτερη για το λόγο ότι γενικά οι αντιστρόφως ανάλογες σχέσεις παρουσιάζουν δυσκολία στην κατανόησή τους. Μελέτες που αφορούσαν τις σχέσεις ανάμεσα στο χρόνο, την ταχύτητα και την απόσταση (Acredolo, Adams & Schmid 1984) ή το κατά πόσο επηρεάζει η ποσότητα νερού και ζάχαρης την γλυκύτητα ενός ροφήματος (Strauss & Stavy 1982), έδειξαν ότι η κατανόηση των ανάλογων σχέσεων έχει ολοκληρωθεί στην ηλικία των 6 ετών, ενώ η κατανόηση των αντιστρόφως ανάλογων σχέσεων διαρκεί μέχρι και το 9^ο έτος της ηλικίας τους.

Για το λόγο αυτό το πρώτο πείραμα αυτής της μελέτης μας θα εξετάσει όχι μόνο την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στον διαιρετό και το πηλίκο, αλλά και της ανάλογης σχέσης ανάμεσα στο διαιρετό και το πηλίκο.

Το δεύτερο πείραμά μας θα εξετάσει κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να βοηθηθούν στην κατανόηση των σχέσεων ανάμεσα στους διαιρετικούς όρους. Εάν η κατανόηση των διαιρετικών σχέσεων συμβάλλει στην κατανόηση της διαίρεσης ως πράξης, τότε αξίζει να μελετηθούν τρόποι που θα συντελέσουν θετικά σε αυτή τους την κατάκτηση.

ΜΕΛΕΤΗ 1

Μεθοδολογία

Σκοπός του πρώτου πειράματος ήταν η εξέταση της κατανόησης των διαιρετικών σχέσεων από παιδιά ηλικίας 5 ετών. Οι σχέσεις αυτές ήταν: α) η ανάλογη σχέση ανάμεσα στον διαιρετό και το πηλίκο και β) η αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρετό και το πηλίκο. Οι σχέσεις αυτές εξετάστηκαν στο πλαίσιο των προβλημάτων της διαίρεσης ως μερισμού και της διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Σε αντίθεση με όλες τις προηγούμενες μελέτες (Correa, Nunes & Bryant 1998, Sophian, Garyantes & Chang 1997) και οι δύο τύποι προβλημάτων δόθηκαν στα ίδια παιδιά. Έτσι ήταν δυνατό να εξετάσουμε αν η κατανόηση διαιρετικών σχέσεων αναπτύσσεται και εφαρμόζεται ταυτόχρονα σε όλα τα διαφορετικά προβλήματα.

Η υπόθεση της έρευνας ήταν ότι η κατανόηση της ανάλογης σχέσης θα ήταν πιο εύκολη από αυτή της αντίστροφης σχέσης. Η κατανόηση των διαιρετικών σχέ-

σεων αναμενόταν να είναι πιο εύκολη στα προβλήματα μερισμού από ό,τι στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Η αναμενόμενη αυτή διαφορά οφείλεται στο γεγονός ότι τα προβλήματα μερισμού είναι πιο κοντά στην καθημερινή εμπειρία του παιδιού με αποτέλεσμα το σχήμα δράσης του μερισμού να αναπτύσσεται νωρίτερα (Correa, Nunes & Bryant 1998).

Τα υποκείμενα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 30 παιδιά (17 αγόρια και 13 κορίτσια) μέσης ηλικίας 5;6 ετών (εύρος ηλικίας από 5;0 έως 5;10 ετών), που παρακολουθούσαν την προδημοτική τάξη σε δύο δημόσια σχολεία του Βορείου Λονδίνου. Τα παιδιά αυτά δεν είχαν εισαχθεί σε πολλαπλασιαστικές και διαιρετικές έννοιες στο σχολείο.

Όλα τα παιδιά της έρευνας ήξεραν να μοιράζουν και να μετρούν χωρίς κανένα λάθος μέχρι το 30.

Το υλικό

Το υλικό της έρευνας αποτελούνταν από 48 καραμέλες, 4 καφετιές και 4 πολικές αρκούδες φτιαγμένες από χαρτί.

Ο σχεδιασμός

Από τα παιδιά ζητήθηκε να σκεφτούν για τις σχέσεις ανάμεσα στους διαιρετικούς όρους σε προβλήματα μερισμού και διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Τα παιδιά έπρεπε να συγκρίνουν το πηλίκο σε δύο περιπτώσεις διαίρεσης και να αποφανθούν σε ποια περίπτωση θα ήταν μεγαλύτερο. Για παράδειγμα, στη μια περίπτωση μια καφετιά αρκούδα θα μοίραζε 12 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της, ενώ μια άλλη πολική αρκούδα θα μοίραζε και αυτή 12 καραμέλες στα 2 αρκουδάκια της (προβλήματα μερισμού). Τα παιδιά έπρεπε να σκεφτούν αν τα καφετιά ή τα λευκά αρκουδάκια θα έπαιρναν τον ίδιο ή διαφορετικό αριθμό καραμέλες.

Κάθε πρόβλημα (μερισμού ή επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης) δόθηκε σε τρεις πειραματικές συνθήκες, οι οποίες ήταν οι εξής:

α) *Η συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών*: Σε αυτή την περίπτωση και ο διαιρετός (καραμέλες) και ο διαιρέτης (τα αρκουδάκια) ήταν οι ίδιοι και στα δύο συγκρινόμενα προβλήματα (βλ. Εικόνα 1). Το πρόβλημα αυτό αναμενόταν να είναι εύκολο μια και οι δύο μεταβλητές παρέμεναν σταθερές. Για το λόγο αυτό η πειραματική αυτή συνθήκη ήταν συνθήκη ελέγχου, για να βεβαιωθούμε ότι τα παιδιά κατανοούσαν τα σχετικά προβλήματα.

β) *Η συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών*: Σε αυτή την περίπτωση ο διαιρετέος, δηλαδή οι καραμέλες που θα μοιράζονταν τα αρκουδάκια, ήταν ο ίδιος και στις δύο συγκρινόμενες περιπτώσεις, αλλά ο διαιρέτης, δηλαδή τα αρκουδάκια που θα μοιράζονταν τις καραμέλες, διέφερε σε αριθμό (βλ. Εικόνα 2). Για να απαντήσουν σωστά τα παιδιά, έπρεπε να εφαρμόσουν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο.

γ) *Η συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών*: Σε αυτή την πειραματική συνθήκη τα αρκουδάκια που θα μοιράζονταν τις καραμέλες ήταν τα ίδια και στα δύο συγκρινόμενα παραδείγματα, όμως η ποσότητα των καραμελών ήταν διαφορετική (βλ. Εικόνα 3). Η σωστή απάντηση μπορούσε να δοθεί αν τα παιδιά κατανοούσαν την απευθείας ανάλογη σχέση του διαιρετέου και του πηλίκου.

Σε κάθε συνθήκη τα παιδιά απάντησαν σε 4 προβλήματα, δηλαδή υπήρχαν συνολικά 12 προβλήματα μερισμού και 12 προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Ο λόγος που δόθηκαν 4 προβλήματα σε κάθε συνθήκη ήταν για να ελεγχθεί η σταθερότητα των απαντήσεων των παιδιών.

Ως διαιρετέοι επιλέχθηκαν οι αριθμοί 12 και 24, πρώτον, επειδή είναι αριθμοί μέχρι τους οποίους μπορούσαν τα παιδιά να μετρήσουν άνετα, και, δεύτερον, επειδή έχουν 4 διαιρέτες ο καθένας. Ως διαιρέτες επιλέχθηκαν οι αριθμοί 2, 3, 4 και 6. Η ακριβής δομή της έρευνας περιγράφεται στον Πίνακα 1.

Οι συνδυασμοί των αριθμών που δόθηκαν διέφεραν συστηματικά από παιδί σε παιδί, για να ελεγχθεί η επίδραση των διαφορετικών αριθμητικών συνδυασμών στις απαντήσεις τους. Για να αποφευχθούν απαντήσεις που βασίζονταν σε προηγούμενη μνήμη, το κάθε παιδί δεν ρωτήθηκε για το ίδιο ακριβώς ζεύγος αριθμών πάνω από μία φορά.

Τα προβλήματα δόθηκαν ανακατεμένα και σε τυχαία σειρά.

Η διαδικασία

Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά σε ένα ήσυχο χώρο του σχολείου του. Επειδή η όλη διαδικασία διαρκούσε περίπου 50 λεπτά, κάθε παιδί εξετάζοταν σε δύο περιόδους, μία το πρωί και μία το απόγευμα της ίδιας ημέρας. Ο χωρισμός της διαδικασίας σε δύο περιόδους διευκολυνόταν από το γεγονός ότι υπήρχαν προβλήματα μερισμού και διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Έτσι, τα μισά παιδιά άρχισαν τη διαδικασία με προβλήματα μερισμού, ενώ τα άλλα μισά με προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης.

Η διαδικασία άρχιζε με μια συζήτηση για τις αρκούδες και τα αρκουδάκια τους, που αποτελεί σύνθετο θέμα πολλών αγγλικών παραμυθιών. Για παράδειγμα, στα προβλήματα μερισμού, στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών, ο εξεταστής είπε στα παιδιά ότι η καφέ μαμά-αρκούδα ήθελε να μοιράσει στα 3 αρκουδάκια της τις 12 καραμέλες με μέλι που είχε. Επειδή ήταν όλα το ίδιο καλά, θα τους έδινε όλες τις καραμέλες της και θα ήταν δίκαιη στην μοιρασιά της. Το ίδιο θα έκανε και

η πολική μαμά-αρκούδα με τα αρκουδάκια της. Θα έπαιρνε τις 12 καραμέλες της και θα τις μοίραζε στα 2 άσπρα αρκουδάκια της. Με αυτόν τον τρόπο γινόταν ξεκάθαρο ότι οι αρκούδες θα μοίραζαν όλες τις καραμέλες τους και η μοιρασιά θα ήταν δίκαιη. Για να βεβαιωθούν τα παιδιά ότι οι καραμέλες ήταν οι ίδιες σε αριθμό και στις δύο περιπτώσεις, μετρήθηκαν από τα παιδιά μαζί με τον εξεταστή. Η ερώτηση αφορούσε ποια αρκουδάκια μετά τη μοιρασιά θα έτρωγαν περισσότερες καραμέλες: «Θα πάρουν τα καφέ αρκουδάκια τις ίδιες καραμέλες με τα λευκά αρκουδάκια; Ποια νομίζεις ότι θα πάρουν περισσότερες;» (βλ. Εικόνα 2).

Παρόμοια διαδικασία ακολουθήθηκε και για τα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Αυτή τη φορά όμως τα προβλήματα ήταν διαφορετικά. Έτσι, για παράδειγμα, στη συνθήκη διαφορετικών διαιρετών, η καφέ αρκούδα είχε 12 καραμέλες με μέλι και τις έβαζε σε κουτάκια ανά 2, για να τις κάνει δώρο στους φίλους της, ενώ η πολική αρκούδα, που είχε και αυτή 12 καραμέλες, τις έβαζε ανά 3. Το ερώτημα ήταν ποια αρκούδα θα γέμιζε περισσότερα κουτάκια με καραμέλες: «Θα γεμίσει η καφέ αρκούδα τα ίδια κουτάκια με τη λευκή; Ποια νομίζεις ότι θα γεμίσει περισσότερα;». Για να υποβοηθηθεί η μνήμη των παιδιών δίπλα από κάθε αρκούδα, ο εξεταστής έβαλε μια εικόνα που έδειχνε πόσες καραμέλες θα έβαζε η κάθε αρκούδα στο κουτάκι (βλ. Εικόνα 4).

Μετά από κάθε ερώτηση, ο ερευνητής ζητούσε από τα παιδιά να αιτιολογήσουν την απάντησή τους.

Αποτελέσματα

Για κάθε σωστή απάντηση δόθηκε σε κάθε παιδί ένας βαθμός. Έτσι σε κάθε πειραματική συνθήκη, σε κάθε τύπο προβλήματος, η βαθμολογία των παιδιών μπορούσε να κυμανθεί από 0 έως 4. Οι πίνακες 2 και 3 παρουσιάζουν το σύνολο των βαθμών που συγκέντρωσαν τα παιδιά σε κάθε συνθήκη στα προβλήματα μερισμού και διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης αντίστοιχα.

Από τα δεδομένα της έρευνας προκύπτει ότι τα περισσότερα παιδιά ήταν προσεκτικά στις απαντήσεις που έδωσαν, γι' αυτό και συγκέντρωσαν τον ανώτατο ή τον κατώτατο βαθμό. Τα παιδιά που συγκέντρωσαν βαθμούς 1 ή 2 πιθανόν να απάντησαν στην τύχη. Υπήρχε η πιθανότητα 1 στα 3 τα παιδιά να βρουν τυχαία τη σωστή απάντηση (η καφέ αρκούδα, η λευκή αρκούδα, και οι δυο το ίδιο). Για το λόγο αυτό μόνο τα παιδιά που απάντησαν στατιστικώς μη τυχαία ($p < .05$) θεωρήθηκαν ως επιτυχή. Σε αυτή την κατηγορία περιλήφθησαν μόνο τα παιδιά που απάντησαν επιτυχώς στις τέσσερις ερωτήσεις.

Τα δεδομένα των πινάκων 2 και 3 δείχνουν ότι η επίδοση των παιδιών διέφερε ως αποτέλεσμα της πειραματικής συνθήκης. Στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών και στα δύο είδη διαίρεσης η πλειονότητα των παιδιών έδωσε τη σωστή απάντηση. Επειδή επρόκειτο για συνθήκη ελέγχου, το αποτέλεσμα δείχνει ότι τα παιδιά κατανόησαν τα προβλήματα που τους δόθηκαν.

Ελαφρώς χαμηλότερη ήταν η επίδοση των παιδιών στα προβλήματα των διαφορετικών διαιρετών. Για να απαντήσουν σωστά στα προβλήματα αυτά τα παιδιά, έπρεπε να εφαρμόσουν την ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρετέο και το ηλίκο. Δηλαδή όσο πιο πολλές είναι οι καραμέλες τόσο πιο πολλές θα πάρει ο κάθε αποδέκτης.

Αισθητά πιο χαμηλή όμως ήταν η επίδοση των παιδιών στα προβλήματα διαφορετικών διαιρετών, που απαιτούσαν την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο. Δηλαδή όσο πιο πολλοί μοιράζονται μια ποσότητα, τόσο πιο λίγο θα πάρει ο καθένας τους. Αν και περισσότερες σωστές απαντήσεις στην συνθήκη αυτή δόθηκαν στα προβλήματα μερισμού (43%) σε σύγκριση με τα προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης (30%), εντούτοις το McNemar test έδειξε ότι η διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στα δύο αυτά προβλήματα δεν ήταν στατιστικώς σημαντική ($p < .13$). Αν και όλα τα παιδιά που απάντησαν σωστά σε αυτή τη συνθήκη στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης είχαν δώσει τη σωστή απάντηση στα προβλήματα μερισμού, εντούτοις δεν συνέβαινε και το αντίστροφο. Τέσσερα παιδιά απάντησαν σωστά στα προβλήματα μερισμού, όχι όμως και στα προβλήματα της επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης.

Η κατανόηση της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο ήταν στατιστικά δυσκολότερη από την κατανόηση της ανάλογης σχέσης ανάμεσα στο διαιρετέο και το ηλίκο τόσο στα προβλήματα μερισμού ($p < .0005$) όσο και στα προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης ($p < .0001$).

Η ανάλυση των αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά στις απαντήσεις τους έριξε περισσότερο φως στο γιατί τα παιδιά απάντησαν με αυτό το συγκεκριμένο τρόπο. Οι απαντήσεις των παιδιών στις πειραματικές συνθήκες των διαφορετικών διαιρετών και των διαφορετικών διαιρετών κατατάσσονται σε πέντε κατηγορίες. Η συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών δεν συμπεριλήφθηκε, γιατί αποτελούσε συνθήκη ελέγχου.

Οι αιτιολογήσεις των παιδιών έχουν ως εξής:

α) *Μη σχετικές προς το πρόβλημα*: Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται απαντήσεις του τύπου «δεν ξέρω», καθώς και απαντήσεις που αντανακλούν προσωπικές προτιμήσεις των παιδιών, όπως για παράδειγμα «τα καφετιά αρκουδάκια θα πάρουν περισσότερες καραμέλες, γιατί είναι πιο όμορφα».

β) *Απαντήσεις που επικεντρώνονται στο διαιρετέο*: Στις πειραματικές συνθήκες που ο διαιρετέος (οι καραμέλες) και στα δύο συγκρινόμενα παραδείγματα ήταν ο ίδιος, μερικά παιδιά υπέθεσαν ότι το αποτέλεσμα της διαίρεσης θα είναι το ίδιο, αγνοώντας τη διαφορά στον αριθμό των παιδιών που μοιράζονταν. Έτσι, όταν τις 12 καραμέλες τις μοιράζονταν 3 καφετιές αρκούδες στη μια περίπτωση και 4 πολικές στην άλλη, ορισμένα παιδιά είπαν ότι τα αρκουδάκια θα πάρουν το ίδιο, γιατί θα μοιραστούν 12 καραμέλες και στις δύο περιπτώσεις.

γ) *Απαντήσεις που επικεντρώνονται στην ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρετέο και το ηλίκο*: Στα προβλήματα μερισμού στην πειραματική συνθήκη, όπου τα αρ-

κουδάκια που μοιράζονταν ήταν τα ίδια και στις δύο περιπτώσεις, αλλά διέφερε η ποσότητα που ήταν να μοιραστεί, πολλά παιδιά αιτιολόγησαν την απάντησή τους λέγοντας ότι τις περισσότερες καραμέλες θα πάρουν τα αρκουδάκια που θα μοιραστούν τις περισσότερες καραμέλες. Παρόμοια, στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, όταν και οι δυο αρκούδες έβαζαν τον ίδιο αριθμό καραμελών στα κουτάκια, τα παιδιά απάντησαν ότι τα περισσότερα κουτάκια θα τα γεμίσει η αρκούδα με τις περισσότερες καραμέλες.

δ) *Απαντήσεις που επικεντρώνονται στην ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο*: Στην πειραματική συνθήκη όπου τις ίδιες καραμέλες θα μοιράζονταν διαφορετικός αριθμός από καφετιές και πολικές αρκούδες, πολλά παιδιά υπέθεσαν ότι όσο πιο πολλά ήταν τα αρκουδάκια, τόσο πιο πολλές καραμέλες θα έπαιρναν. Εφαρμόζοντας την ίδια λογική και στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, πολλά παιδιά σκέφτηκαν ότι όσο περισσότερες καραμέλες έβαζε σε κάθε κουτάκι η κάθε αρκούδα, τόσο περισσότερα κουτάκια θα γέμιζε.

ε) *Απαντήσεις που επικεντρώνονται στην αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο*: Στην πειραματική συνθήκη όπου διαφορετικός αριθμός από καφετιές και πολικές αρκούδες θα μοιράζονταν τις ίδιες καραμέλες, πολλά παιδιά εφάρμοσαν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το ηλίκο και απάντησαν ότι όσο πιο λίγες αρκούδες μοιράζονται τις καραμέλες, τόσο πιο πολλές θα πάρει η καθεμία τους. Η ίδια αιτιολόγηση δόθηκε από αρκετά παιδιά και στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, όπου υπέθεσαν ότι όσο πιο πολλές καραμέλες βάζει κανείς στα κουτάκια, τόσο πιο λίγα κουτάκια θα γεμίσει, γιατί οι καραμέλες θα του τελειώσουν γρήγορα.

Περαιτέρω ανάλυση έδειξε ότι τα παιδιά που έδωσαν σωστές απαντήσεις μπορούσαν και να τις αιτιολογήσουν σωστά. Όπως φαίνεται στον πίνακα 4, το 97% των σωστών απαντήσεων στα προβλήματα μερισμού, στη συνθήκη κατά την οποία ο ίδιος αριθμός από αρκουδάκια μοιράζονταν διαφορετικές ποσότητες από καραμέλες, δικαιολογήθηκε από τα παιδιά με την εφαρμογή της ανάλογης σχέσης ανάμεσα στο διαιρετέο και το ηλίκο. Στα ανάλογα προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης ποσοστό 95% των σωστών απαντήσεων συνοδεύτηκε από την αιτιολόγηση ότι όσο πιο πολλές ήταν οι καραμέλες τόσο πιο πολλά κουτάκια θα γέμιζαν (πίνακας 6). Τα ελάχιστα παιδιά, που απάντησαν λανθασμένα σε αυτή την πειραματική συνθήκη, έδωσαν απαντήσεις με βάση προσωπικές τους προτιμήσεις ή απάντησαν με τη φράση «δεν ξέρω».

Στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών το 96% των σωστών απαντήσεων συνοδεύτηκε από την αιτιολόγηση της αντίστροφης σχέσης του διαιρέτη και του ηλίκου. Δηλαδή ότι όσο πιο πολλοί μοιράζονται κάτι, τόσο πιο λίγο θα πάρει ο καθένας (πίνακας 5). Η αιτιολόγηση ότι σε όσο πιο μεγάλα μέρη μοιράζεται κάτι, τόσο λιγότερα μέρη μπορεί κανείς να σχηματίσει, δόθηκε στο 93% των σωστών απαντήσεων στα αντίστοιχα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης (πίνακας 7). Οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις στη συνθήκη αυτή

δόθηκαν εξαιτίας της εφαρμογής της ανάλογης αντί της αντίστροφης σχέσης του διαιρέτη και του πηλίκου. Έτσι τα παιδιά σκέφτηκαν ότι τα περισσότερα κουτάκια θα τα γεμίσει η αρκούδα που βάζει τις περισσότερες καραμέλες.

Το γεγονός ότι τα παιδιά μπορούσαν να αιτιολογήσουν με σταθερότητα τις απαντήσεις τους, είτε αυτές ήταν σωστές είτε όχι, σημαίνει ότι απαντούσαν βάσει μια λογικής που εφάρμοζαν και όχι τυχαία.

Συζήτηση

Αν και όλα τα παιδιά που πήραν μέρος στη μελέτη αυτή ήξεραν πώς να μοιράζουν, εντούτοις η πλειονότητά τους έδειξε ότι δεν κατανοεί όλο το φάσμα των διαιρητικών σχέσεων. Όπως ήταν αναμενόμενο, τα περισσότερα παιδιά έδειξαν ότι κατανοούν την ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρετέο και το πηλίκο, όχι όμως και την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο. Τα αποτελέσματα αυτά για τη δυσκολία της αντίστροφης σχέσης βρίσκονται σε συμφωνία με αυτά άλλων, προηγούμενων ερευνών, που βρήκαν παρόμοια ποσοστά επιτυχίας σε αυτή την ηλικία (Correa, Nunes & Bryant 1998, Kornilaki & Nunes 1997, Sophian, Garyantes and Chang 1997).

Αν και η διαφορά στην επίδοση των παιδιών στα προβλήματα μερισμού και επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης δεν ήταν στατιστικώς σημαντική, εντούτοις η μελέτη επιβεβαίωσε την τάση δυσκολίας που παρουσιάζουν τα προβλήματα επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Υπήρχαν παιδιά που κατανοούσαν τις διαιρητικές σχέσεις στο πλαίσιο του ενός, αλλά όχι και του άλλου προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι αρχικά η κατανόηση διαιρητικών σχέσεων είναι στενά εξαρτημένη από τη δομή του προβλήματος και δεν μπορεί να γενικευθεί σε όλους τους τύπους τών προβλημάτων διαίρεσης.

Η διάσταση που υπάρχει ανάμεσα στην ικανότητα των παιδιών να μοιράζουν μεταξύ τους αντικείμενα και να κατανοούν διαιρητικές σχέσεις ενισχύει το διαχωρισμό ανάμεσα στο σχήμα δράσης του μοιράσματος και τη διαίρεση ως πράξη. Αν και το σχήμα δράσης του μερισμού, το οποίο τα παιδιά αναπτύσσουν πολύ νωρίς, θέτει τα θεμέλια για την κατανόηση της διαίρεσης, ωστόσο η ικανότητα μοιράσματος είναι αναγκαία, αλλά όχι επαρκής προϋπόθεση για την κατανόηση των διαιρητικών σχέσεων.

Η ιδιαίτερη δυσκολία που παρουσιάζει η αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο μπορεί να οφείλεται στη γενίκευση των σχέσεων που ισχύουν μεταξύ των φυσικών αριθμών. Με τον ίδιο τρόπο που τα παιδιά θεωρούν ότι το κλάσμα $1/3$ είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα $1/2$, για τον απλούστατο λόγο ότι ο αριθμός 3 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 2 (Gelman 1991, Mack 1990, Post 1981), έτσι και τα πεντάχρονα παιδιά σε αυτή τη μελέτη θεώρησαν ότι το μερίδιο θα είναι μεγαλύτερο όταν οι 12 καραμέλες θα μοιραστούν ανάμεσα σε 4 παρά σε 3 αρκούδκια, γιατί το 4 είναι αριθμός μεγαλύτερος από τον αριθμό 3.

Το γεγονός ότι τα περισσότερα παιδιά εφάρμοσαν την ανάλογη αντί την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο οδηγεί στο ερώτημα κατά πόσο είναι εύκολο να άρει κανείς αυτή τη λανθασμένη αντίληψή τους. Για το λόγο αυτό η επόμενη μελέτη είναι μια παρέμβαση που επικεντρώνεται στο πώς μπορούν να βοηθηθούν τα παιδιά, για να κατανοήσουν την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη και του πηλίκου.

ΜΕΛΕΤΗ 2

Μεθοδολογία

Σκοπός αυτού του πειράματος ήταν να εξετάσει εάν τα μικρά παιδιά μπορούν να βοηθηθούν στην κατανόηση της αντίστροφης σχέσης μεταξύ του διαιρέτη και του πηλίκου, όταν τους δοθεί η ευκαιρία να δουν πώς επηρεάζεται το πηλίκο μιας διαίρεσης από τον αριθμό των αποδεκτών.

Για το λόγο αυτό, η παρούσα μελέτη συγκρίνει την αποτελεσματικότητα δύο διαφορετικών μεθόδων παρέμβασης που έχουν προταθεί. Η μια μορφή παρέμβασης προτάθηκε από την Correa (1995). Σύμφωνα με αυτή, τα παιδιά μπορούν να ωφεληθούν στην κατανόηση διαιρητικών σχέσεων από την εμπειρία του μοιράσματος. Πενήντα πέντε παιδιά ηλικίας 5 έως και 7 ετών από την Οξφόρδη χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ομάδες, την ομάδα παρέμβασης και την ομάδα ελέγχου. Στην ομάδα ελέγχου ζητήθηκε από τα παιδιά να συγκρίνουν το πηλίκο δύο διαιρέσεων και να βρουν σε ποια περίπτωση τα γουρουνάκια θα έπαιρναν περισσότερες καραμέλες, όταν, για παράδειγμα, 24 καραμέλες τις μοιράζονταν 4 ή 6 γουρουνάκια. Στην ομάδα παρέμβασης δόθηκαν οι ίδιες ακριβώς ερωτήσεις, με τη διαφορά ότι ο εξεταστής μοίρασε πρώτα τις 24 καραμέλες στα 4 γουρουνάκια και μετά ζήτησε από το παιδί να σκεφτεί εάν το πηλίκο θα άλλαζε και προς ποια κατεύθυνση, όταν θα μοίραζε τις άλλες 24 καραμέλες στα 6 γουρουνάκια. Βρέθηκε ότι τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικώς σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στην ομάδα παρέμβασης, όπου είχαν τη δυνατότητα να δουν μοιρασμένη μία από τις δύο συγκρινόμενες ποσότητες.

Οι Sophian, Garyantes & Chang (1997) εισηγήθηκαν ότι τα παιδιά ωφελούνται περισσότερο, όταν έχουν την ευκαιρία να συγκρίνουν άμεσα τα πηλικά δύο διαιρέσεων και όχι βλέποντας απλώς το αποτέλεσμα ενός μοιράσματος, χωρίς να έχουν τη δυνατότητα να το συγκρίνουν με ένα άλλο. Οι ίδιοι έκαναν τη μελέτη τους με συνεχείς ποσότητες, που καταλήγουν σε κλασματικό πηλίκο και θεωρούνται πιο δύσκολες (Hiebert & Tonnesen 1978, Hunting & Sharpley 1988, Miller 1984), σε αντίθεση με την Correa (1995), που χρησιμοποίησε ασυνεχείς ποσότητες. Οι Sophian, Garyantes & Chang (1997) ζήτησαν από τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης να σκεφτούν πότε ένα τερατάκι θα έτρωγε περισσότερη πίτσα, όταν κάθονταν στο ένα τραπέζι και τη μοιραζόταν με τρεις φίλους του ή όταν κάθονταν σε ένα

άλλο τραπέζι και τη μοιραζόταν με τέσσερις φίλους του. Δίδοντας το παιδί την απάντησή του, μπορούσε να κάνει τις δύο πιθανές μοιρασιές και να δει πότε το μερίδιο θα ήταν μεγαλύτερο. Τα παιδιά της ομάδας ελέγχου, δίδοντας την απάντησή τους, μοίραζαν την πίτσα μόνο στο τραπέζι που πίστευαν ότι αναλογούν τα μεγαλύτερα μερίδια. Η μελέτη έδειξε ότι στο μετατέστ που ακολούθησε, κατά το οποίο τα παιδιά σύγκριναν τα πηλικά διαιρέσεων χωρίς να εκτελούν κανένα μοίρασμα, τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης, που είχαν την ευκαιρία να κάνουν άμεσες συγκρίσεις, είχαν περισσότερες πιθανότητες να εφαρμόσουν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο.

Η παρούσα μελέτη στοχεύει να συγκρίνει τις δύο παραπάνω μεθόδους παρέμβασης. Η άμεση σύγκριση της μεθόδου της Correa (1995) με αυτήν των Sophian, Garyantes & Chang (1997) ως έχει δεν είναι δυνατή για τους ακόλουθους λόγους:

α) Η πειραματική συνθήκη που γίνεται το μοίρασμα της μια από τις δύο διαιρέσεις δεν είναι η ίδια και στις δύο μελέτες. Στη μελέτη της Correa (1995) η μια από τις δυο συγκρινόμενες ποσότητες (πότε αυτή με το μεγαλύτερο διαιρέτη και πότε αυτή με το μικρότερο) μοιράζεται από τον εξεταστή. Αφού το παιδί παρακολουθήσει τη διαδικασία του μοιράσματος, αποφασίζει εάν η άλλη διαίρεση θα οδηγήσει σε μεγαλύτερο ή μικρότερο πηλίκο. Στη μελέτη των Sophian, Garyantes & Chang (1997), όμως, το μοίρασμα γίνεται κατόπιν της αποφάσεως του παιδιού, χωρίς αναγκαστικά να αποτελεί περαιτέρω πρόκληση για σκέψη.

β) Η μελέτη της Correa (1995) έγινε με ασυνεχείς ποσότητες, ενώ εκείνη των Sophian, Garyantes & Chang (1997) με συνεχείς. Είναι πιθανόν οι διαφορές στην αποτελεσματικότητα των δύο μεθόδων να οφείλονται και στους διαφορετικούς ρυθμούς ανάπτυξης, που έχουν παρατηρηθεί στη διαίρεση των συνεχών και των ασυνεχών ποσοτήτων.

Η αποτελεσματικότητα των δύο μεθόδων θα εξεταστεί και σε προβλήματα μερισμού και σε προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης.

Τα υποκείμενα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος 120 παιδιά (57 αγόρια και 63 κορίτσια) μέσης ηλικίας 5;7 ετών (εύρος ηλικίας από 5;0 έως 5;11), που παρακολουθούσαν την προδημοτική τάξη πέντε δημοσίων σχολείων του Βορείου Λονδίνου. Κανένα από αυτά τα παιδιά δεν είχε πάρει μέρος στην μελέτη 1. Όλα τα παιδιά ήξεραν να μετρούν μέχρι το 30 και να μοιράζουν σωστά. Κανένα όμως δεν είχε διδαχτεί πολλαπλασιασμό ή διαίρεση στο σχολείο.

Το υλικό

Το υλικό της έρευνας αποτελούνταν από 48 καραμέλες, 6 καφετιές και 6 πολικές αρκούδες, φτιαγμένες από χαρτί, που διέφεραν μόνο στο χρώμα.

Ο σχεδιασμός και η διαδικασία

Ο σχεδιασμός αυτής της μελέτης βασίζεται σε μια σύνθεση και περαιτέρω βελτίωση των μεθόδων παρέμβασης της Correa (1995) και των Sophian, Garyantes & Chang (1997).

Τα παιδιά της έρευνας χωρίστηκαν τυχαία σε δύο ισάριθμες ομάδες, σε αυτά που θα έπαιρναν μέρος στη μελέτη με τα προβλήματα μερισμού και σε εκείνα που θα συμμετείχαν στη μελέτη με τα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης.

Τα παιδιά της κάθε μελέτης κατατάχθηκαν τυχαία σε τρεις εικοσαμελείς ομάδες. Στην ομάδα ελέγχου, η οποία δεν συμμετείχε σε καμία παρέμβαση, στην ομάδα παρέμβασης Ι, στην οποία τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να δουν το μοίρασμα της σε μία από τις δύο συγκρινόμενες διαιρέσεις και την ομάδα παρέμβασης ΙΙ, στην οποία τα παιδιά μπορούσαν να κάνουν το μοίρασμα και των δύο διαιρέσεων, για να επαληθεύσουν την ορθότητα ή μη των απαντήσεών τους.

Πιο αναλυτικά, ο σχεδιασμός είχε ως ακολούθως. Τα παιδιά εξετάστηκαν σε τρεις φάσεις: στο προτέστ, την παρέμβαση και το μετατέστ. Η διαδικασία στο προτέστ και το μετατέστ ήταν η ίδια για όλες τις ομάδες. Οι ομάδες διέφεραν μόνο στο στάδιο της παρέμβασης.

Στο προτέστ δόθηκαν στα παιδιά προβλήματα όμοια με αυτά της μελέτης 1, με τη διαφορά ότι τα προβλήματα ήταν μόνο από την πειραματική συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών. Για παράδειγμα, τα παιδιά έπρεπε να σκεφτούν σε ποια περίπτωση τα αρκουδάκια θα έπαιρναν περισσότερες καραμέλες, όταν τις 12 καραμέλες τις μοιράζονταν 3 ή 4 αρκουδάκια (πρόβλημα μερισμού). Ανάλογα προβλήματα με εκείνα της μελέτης 1 δόθηκαν για τα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Τα παιδιά απάντησαν σε 4 τέτοιες ερωτήσεις, δύο με διαιρετό τον αριθμό 12 (12 καραμέλες) και δύο με διαιρετό τον αριθμό 24.

Στο στάδιο της παρέμβασης, στα παιδιά της ομάδας Ι δόθηκαν 4 ερωτήσεις όπως τις παραπάνω, με τη διαφορά ότι, προτού απαντήσουν, ο εξεταστής μοίραζε, για παράδειγμα, μπροστά στο παιδί τις 12 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της μιας ομάδας και το παιδί εκαλείτο να σκεφτεί τι θα γίνονταν αν οι άλλες 12 καραμέλες μοιράζονταν στα 4 αρκουδάκια. Στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, όπου τα παιδιά έπρεπε να βρουν ποια αρκούδα θα γέμιζε περισσότερα σακουλάκια από καραμέλες, αυτή που τις έβαζε ανά 2 ή αυτή που τις έβαζε ανά 3 (δεδομένου ότι και οι δυο είχαν 12 καραμέλες), ο εξεταστής αφαιρούσε σταδιακά από τη μια δωδεκάδα 2άδες μέχρι να τελειώσουν οι καραμέλες και μετά ρωτούσε το παιδί αν η άλλη αρκούδα που αφαιρούσε 3άδες θα γέμιζε περισσότερα ή λιγότερα σακουλάκια. Ο εξεταστής φρόντιζε να εκτελεί τη διαίρεση πότε με το μεγαλύτερο και πότε με το μικρότερο διαιρέτη.

Στο στάδιο της παρέμβασης, τα παιδιά της ομάδας ΙΙ, αφότου έδιναν την απάντησή τους, είχαν τη δυνατότητα να κάνουν το μοίρασμα, να συγκρίνουν τα δύο πηλικά και να επαληθεύσουν ή να τροποποιήσουν την απάντησή τους.

Τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης Ι και ΙΙ απάντησαν σε 4 τέτοιες ερωτήσεις, δύο με διαιρετό (καραμέλες) το 12 και δύο με διαιρετό το 24. Οι αριθμητικοί συνδυασμοί που δόθηκαν ήταν διαφορετικοί από αυτούς που είχαν στο προτέστ.

Στα παιδιά της ομάδας ελέγχου, η διαδικασία ήταν η ίδια με το προτέστ, με τη διαφορά ότι τους δόθηκαν διαφορετικοί αριθμητικοί συνδυασμοί από πριν.

Στο μετατέστ, όπως και στο προτέστ, τα παιδιά όλων των ομάδων συγκρίναν τα ηλίκια διαφόρων διαιρέσεων, τεσσάρων στον αριθμό, που διέφεραν μόνο στο μέγεθος του διαιρέτη. Και αυτή τη φορά οι αριθμητικοί συνδυασμοί που δόθηκαν ήταν διαφορετικοί από όλους τους προηγούμενους.

Επειδή υπήρχε η πιθανότητα τα παιδιά στη διαδικασία παρέμβασης να μάθουν να απαντούν αδιακρίτως με βάση το γενικό κανόνα ότι «οι λιγότεροι παίρνουν τα περισσότερα», χωρίς να κατανοούν πότε ισχύει ο κανόνας, μέσα στις παραπάνω δραστηριότητες υπήρξαν και ορισμένες δραστηριότητες προσθετικής σκέψης, στις οποίες η σωστή απάντηση ήταν ότι τα περισσότερα θα πάρει αυτός που έχει τα περισσότερα. Αυτή η δραστηριότητα υιοθετήθηκε αυτούσια από τη μελέτη των Sophian, Garyantes & Chang (1997). Έτσι τα παιδιά είδαν δυο σειρές με σακουλάκια από καραμέλες, μια για κάθε αρκουδάκι. Οι δύο σειρές βρίσκονταν σε αντιστοιχία ένα προς ένα, και έτσι ήταν εύκολο για το παιδί να καταλάβει ποια σειρά είχε τα περισσότερα σακουλάκια. Το παιδί ρωτήθηκε ποιο αρκουδάκι θα έτρωγε περισσότερες καραμέλες. Τέσσερις τέτοιες δραστηριότητες πρόσθεσης δόθηκαν στο προτέστ και το μετατέστ και στις τρεις ομάδες παιδιών. Οι δραστηριότητες διαίρεσης και πρόσθεσης παρουσιάστηκαν ανακατεμένες και σε τυχαία σειρά.

Τα ζεύγη των αριθμών που δόθηκαν σε κάθε φάση εξέτασης, διέφεραν συστηματικά από το ένα υποκείμενο στο άλλο. Το κάθε παιδί δεν ρωτήθηκε ποτέ για το ίδιο ζεύγος αριθμών σε καμία φάση της μελέτης, για να αποφευχθούν απαντήσεις που βασίζονταν σε προηγούμενη μνήμη.

Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά στη βιβλιοθήκη του σχολείου τους και οι ερωτήσεις δόθηκαν με τον τρόπο που δόθηκαν και στη μελέτη 1.

Αποτελέσματα

Προβλήματα μερισμού

Όπως και στη μελέτη 1, στο προτέστ και το μετατέστ οι απαντήσεις των περισσότερων παιδιών χαρακτηρίζονταν από κάποια σταθερότητα σε όλες τις ομάδες. Έτσι, τα περισσότερα παιδιά απάντησαν ή και στις τέσσερις ερωτήσεις του προτέστ σωστά ή σε όλες λάθος. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά απαντούσαν ή λανθασμένα, εφαρμόζοντας τη λογική ότι οι περισσότερες αρκούδες παίρνουν και τις περισσότερες καραμέλες, ή σωστά, με τη σκέψη ότι όσο πιο πολλοί μοιράζονται μια ποσότητα, τόσο πιο λίγο θα πάρει ο καθένας. Είναι πιθανόν ότι τα 8 παιδιά που απάντησαν σε κάποιες ερωτήσεις σωστά και σε κάποιες λάθος τροποποιούσαν τις απαντήσεις τους τυχαία. Με βάση τον πίνακα των πιθανοτήτων, για να είμαστε

95% βέβαιοι ότι τα παιδιά δεν απαντούσαν τυχαία, έπρεπε κάθε παιδί να απαντήσει σωστά 4 στις 4 ερωτήσεις. Τότε μόνο μπορούσε να θεωρηθεί επιτυχία. Όπως φαίνεται στον πίνακα 8, 8 παιδιά της ομάδας ελέγχου, 7 της ομάδας παρέμβασης Ι και 9 της ομάδας παρέμβασης ΙΙ έδωσαν τις σωστές απαντήσεις στο προτέστ.

Τα παιδιά στη φάση του προτέστ έδειξαν ότι μπορούν να διαχωρίζουν τα προβλήματα που απαιτούσαν προσθετική από εκείνα που απαιτούσαν διαιρετική σκέψη. Η επίδοσή τους στα προβλήματα προσθετικής σκέψης όπως φαίνεται στον πίνακα 8 ήταν ιδιαίτερα υψηλή σε όλες τις ομάδες.

Καμία αλλαγή δεν σημειώθηκε στην επίδοσή των παιδιών από το προτέστ στο μετατέστ στην ομάδα ελέγχου. Τα ίδια παιδιά, που έδωσαν αρχικά σωστές απαντήσεις, συνέχισαν να απαντούν σωστά κατά τη διάρκεια όλης της διαδικασίας.

Διαφοροποιήσεις όμως παρουσιάστηκαν στην επίδοσή των παιδιών στην ομάδα παρέμβασης Ι και ΙΙ από το προτέστ στο μετατέστ (πίνακας 8). Στην ομάδα παρέμβασης Ι, στην οποία τα παιδιά είδαν μόνο τη μία από τις δύο ποσότητες να μοιράζεται, 4 παιδιά βελτίωσαν την επίδοσή τους από το προτέστ στο μετατέστ. Παρά τη βελτίωση που σημειώθηκε, το McNemar τεστ έδειξε ότι η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική ($p < .12$). Στατιστικώς όμως σημαντική ($p < .02$) ήταν η διαφορά στην επίδοσή των παιδιών από το προτέστ στο μετατέστ στην ομάδα παρέμβασης ΙΙ, στην οποία τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να μοιράσουν και να συγκρίνουν τα ηλίκια και των δύο διαιρέσεων.

Η ανάλυση λογιστικής παλινδρόμησης έδειξε ότι αν και τα παιδιά είχαν καλύτερα αποτελέσματα στην ομάδα παρέμβασης ΙΙ, εντούτοις η διαφορά στην αποτελεσματικότητα των δύο μεθόδων δεν ήταν στατιστικώς σημαντική ($p < .11$).

Μια μικρή μείωση της επίδοσης των παιδιών σημειώθηκε στο μετατέστ στα προβλήματα πρόσθεσης. Ένα από τα 7 παιδιά της ομάδας παρέμβασης ΙΙ, που βελτίωσαν την επίδοσή τους στο μετατέστ στα προβλήματα διαίρεσης, μείωσε την επίδοσή του στα προβλήματα πρόσθεσης. Το παιδί αυτό εφαρμόσε τον κανόνα ότι «τα πολλά πάνε στα λίγα» αδιακρίτως και στα προβλήματα πρόσθεσης και στα προβλήματα διαίρεσης. Πάντως, τα περισσότερα παιδιά έδειξαν να διαχωρίζουν τα προβλήματα πρόσθεσης από εκείνα της διαίρεσης και να τροποποιούν ανάλογα τις απαντήσεις τους.

Προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης

Όπως και στην περίπτωση των προβλημάτων μερισμού, τα περισσότερα παιδιά απάντησαν ή σε όλες τις ερωτήσεις του προτέστ και του μετατέστ σωστά (4 στα 4) ή σε όλες λάθος (0 στα 4). Τα ελάχιστα παιδιά (6 συνολικά), που σημείωσαν βαθμολογία 1 ή 2 στα 4 στο προτέστ και το μετατέστ, δεν κατατάχθηκαν στα επιτυχή, γιατί τροποποιούσαν τις απαντήσεις τους τυχαίως.

Τα αποτελέσματα των παιδιών στην ομάδα ελέγχου παρέμειναν αμετάβλητα κατά τη διάρκεια της μελέτης. Τα ίδια παιδιά συνέχισαν να απαντούν είτε σωστά είτε λάθος (πίνακας 9).

Και πάλι αλλαγές στην επίδοση παρατηρήθηκαν μόνο στις ομάδες παρέμβασης. Στην ομάδα παρέμβασης I, όπου ο εξεταστής έβαλε τις καραμέλες της μίας μόνο αρκούδας στα σακουλάκια, για να δει πόσα σακουλάκια μπορούσε να γεμίσει, τα παιδιά βελτίωσαν την επίδοσή τους από το προτέστ στο μετατέστ (πίνακας 9). Ενώ στο προτέστ μόνο 6 παιδιά απάντησαν σωστά, ο αριθμός των παιδιών με σωστές απαντήσεις διπλασιάστηκε στα 12. Το McNemar τεστ έδειξε ότι η διαφορά αυτή ήταν στατιστικώς σημαντική ($p < .03$).

Ακόμα μεγαλύτερη βελτίωση παρουσιάστηκε στην ομάδα παρέμβασης II, όπου τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να μοιράσουν τις καραμέλες που είχαν και στις δύο αρκούδες και να δουν ποια θα γέμιζε περισσότερα σακουλάκια (πίνακας 9). Ενώ 5 παιδιά έδωσαν σωστές απαντήσεις στο προτέστ, 13 παιδιά απάντησαν σωστά στο μετατέστ. Κατά το McNemar τεστ η διαφορά αυτή στην επίδοση ήταν στατιστικώς σημαντική ($p < .009$).

Η ανάλυση λογιστικής παλινδρόμησης έδειξε ότι τα παιδιά της ομάδας παρέμβασης II σημείωσαν μεγαλύτερη πρόοδο στην επίδοσή τους. Η διαφορά επίδοσης ανάμεσα στην ομάδα I και II ήταν στατιστικώς σημαντική ($p < .05$).

Σε όλες τις ομάδες τα παιδιά έδειξαν να διαχωρίζουν μεταξύ των ασκήσεων πρόσθεσης και αυτών της διαίρεσης. Αυτό ήταν ιδιαίτερα σημαντικό για τα παιδιά που βελτίωσαν την επίδοσή τους ως αποτέλεσμα της παρέμβασής που μεσολάβησε. Μόνο 2 από τα 14 παιδιά, που παρουσίασαν συνολικά βελτίωση εξαιτίας της παρέμβασης, γενίκευσαν λανθασμένα τις διαιρητικές σχέσεις και στα προβλήματα πρόσθεσης.

Συζήτηση

Τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης έδειξαν ότι με λίγη βοήθεια τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν την αντίστροφη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο. Παρά τη χαμηλή επίδοση των παιδιών στο προτέστ, τα παιδιά μετά την παρέμβαση βελτίωσαν σημαντικά την επίδοσή τους. Ενώ αρχικά τα περισσότερα παιδιά πίστευαν ότι όσο πιο πολλοί μοιράζονται κάτι τόσο πιο πολλά θα πάρει ο καθένας τους, αρκετά παιδιά τροποποίησαν την απάντησή τους εφαρμόζοντας τη σχέση ότι οι περισσότεροι παίρνουν τα λιγότερα. Η σχέση αυτή έγινε κατανοητή ακόμα και στο πλαίσιο των προβλημάτων διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης, τα οποία προβλήματα τα παιδιά έχουν δυσκολία να κατανοήσουν και να λύσουν (Fischbein, Deri, Nello & Marino 1985). Τα περισσότερα παιδιά μετά την παρέμβαση έδειξαν ότι κατανοούν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο και ότι μπορούν να ξεχωρίσουν πότε θα εφαρμόσουν την αντίστροφη και πότε την ανάλογη σχέση ανάμεσα στους όρους, ανάλογα με τον τύπο προβλημάτων που τους δίνονταν κάθε φορά.

Η μελέτη έδειξε ότι και οι δύο μέθοδοι παρέμβασης συνέβαλαν στη βελτίωση της επίδοσης των παιδιών. Αν και η διαφορά δεν ήταν στατιστικώς σημαντική στα

προβλήματα μερισμού, πιθανόν λόγω του μικρού μεγέθους του δείγματος, εντούτοις καλύτερα αποτελέσματα για την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης του διαιρέτη και του πηλίκου σημειώθηκαν όταν το παιδί είχε την ευκαιρία να παρατηρήσει και να συγκρίνει τα αποτελέσματα διαφορετικών διαιρέσεων, όπως είχε προταθεί από τους Sophian, Garyantes & Chang (1997). Το βέβαιο πάντως είναι ότι τα παιδιά μπορούν να υπερβούν εύκολα τις αρχικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στις διαιρητικές σχέσεις, όταν ασχοληθούν συστηματικά με το μοίρασμα και συγκρίνουν τα πηλικά διαφορετικών διαιρέσεων. Η μελέτη όμως αυτή δεν παρέχει πληροφορίες κατά πόσο τα αποτελέσματα της παρέμβασης ήταν πρόσκαιρα ή μακροπρόθεσμα.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα και των δύο μελετών δημιουργούν μια μάλλον θετική εικόνα για την κατανόηση της διαίρεσης από τα παιδιά και για τις δυνατότητες περαιτέρω ανάπτυξης της ικανότητας αυτής. Αν λάβει κανείς υπόψη ότι τα παιδιά αυτής της έρευνας ήταν μόλις πέντε ετών, ότι δεν είχαν εισαχθεί ποτέ στο σχολείο σε πολλαπλασιαστικές ή διαιρητικές έννοιες, τότε καταλαβαίνει ότι η κατανόηση της ανάλογης σχέσης του διαιρέτου και του πηλίκου και της αντιστρόφου ανάλογης σχέσης του διαιρέτη και του πηλίκου είναι μία σημαντική κατάκτηση.

Όπως φάνηκε και από την μελέτη αυτή (Correa, Nunes & Bryant 1997), το μοίρασμα και η διαίρεση ως πράξη δεν είναι ταυτόσημες έννοιες. Αν και όλα τα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα ήξεραν να μοιράζουν, εντούτοις δεν έδειξαν όλα να κατανοούν την αντίστροφη σχέση του διαιρέτη και του πηλίκου. Τα ευρήματα όμως δείχνουν ότι η συστηματική εμπειρία με το μοίρασμα μπορεί να οδηγήσει στην κατανόηση των διαιρητικών σχέσεων.

Η διαίρεση, ως γνωστό, θεωρείται δύσκολη πράξη. Γι' αυτό και διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο μετά τη διδασκαλία των τριών άλλων πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός). Όμως, από πολύ νωρίς τα παιδιά αρχίζουν να κατανοούν κάποιους βασικούς μηχανισμούς της, γεγονός που βάζει τα θεμέλια για την κατανόηση του μηχανισμού της διαίρεσης, που θα διδαχθεί αργότερα. Το σχολείο πρέπει να γνωρίζει την ικανότητα και εμπειρία αυτή των μικρών παιδιών, ώστε να στηρίζει σ' αυτή τη διδασκαλία που θα ακολουθήσει. Αν το σχολείο συνδέσει τη διδασκαλία της διαίρεσης με τα σχήματα δράσης του μοιράσματος, που τα παιδιά αναπτύσσουν από πολύ νωρίς, καθώς και με την κατανόηση των διαιρητικών σχέσεων που απορρέει απ' αυτά, είναι πιθανόν η διδασκαλία της διαίρεσης ως νέας πράξης να είναι πιο ευχερής. Κι αυτό, γιατί η νέα αυτή πράξη θα είναι οικεία της προϋπάρχουσας εμπειρίας των παιδιών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ACREDOLO, C. – ADAMS, A. – SCHMID, J. (1984): «On the understanding the relationships between speed, duration and distance». *Child Development*, 55, 2151-2159.
- CARPENTER, T.P. – MOSER, J. M. (1982): «The development of addition and subtraction problem solving». Στο: CARPENTER, T.P. – MOSER, J.M. – ROMBERG, T.A. (Επιμ.): *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (σσ. 10-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- CORREA, J. (1995): *Young children's understanding of the division concept*. Unpublished Ph.D. thesis, Oxford University.
- CORREA, J. – NUNES, T. – BRYANT, P. (1998): «Young children's understanding of division: The relation between division terms in a noncomputational task». *Journal of Educational Psychology*, 2, 1-9.
- DAVIS, G.E. – PEPPER, K.L. (1992): «Mathematical problems solving by pre-school children». *Educational Studies in Mathematics*, 23, 397-415.
- DAVIS, G.E. – PITKETHLY, A. (1990): «Cognitive aspects in sharing». *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 145-153.
- DESFORGES, A. – DESFORGES, C. (1980): «Number based strategies of sharing in young children». *Educational Studies*, 6 (2), 97-109.
- FISCHBEIN, E. – DERI, M. – NELLO, M.S. – MARINO, M.S. (1985): «The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division». *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 3-17.
- FRYDMAN, O. – BRYANT, P.E. (1988): «Sharing and understanding of the number equivalence by young children». *Cognitive Development*, 3, 323-329.
- GELMAN, R. (1991): «Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions». Στο: CAREY, S. – GELMAN, R. (Επιμ.): *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition* (σσ. 293-322). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- HIEBERT, J. – TONNESSEN, L.H. (1978): «Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation». *Journal for Research in Mathematics Education*, 9 (5), 374-378.
- HUDSON, T. (1983): «Correspondences and numerical differences between sets». *Child Development*, 54, 84-90.
- HUDGES, M. (1986): *Children and number*. Oxford: Blackwell.
- HUNTING, R.P. – SHARPLEY, C.F. (1988): «Fractional knowledge in preschool children». *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), 175-180.
- HUNTING, R.P. – DAVIS, G.E. (1991): «Dimensions of young children's conceptions of the fraction of half». Στο: HUNTING, R.P. – DAVIS, G.E. (Επιμ.): *Early fraction learning* (σσ. 27-53). New York: Springer.
- KORNILAKI, E. – NUNES, T. (1997): «What do young children understand about division». *The Proceedings of the 21st International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 242.

- MACK, N. (1990): «Learning fractions with an understanding: Building on informal knowledge». *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32.
- MILLER, K. (1984): «Measurement procedures and the development of quantitative concepts». Στο: SOPHIAN, C.: *Origins of cognitive skills. The eighteen annual carnegie symposium on cognition* (σσ. 193-228). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- PIAGET, J. (1965): *The child's conception of number*. New York: Norton.
- POST, T.R. (1981): «Fractions: Results and implications from national assessment». *Arithmetic Teacher*, 28, 26-31.
- RESNICK, L.B. – SINGER, J.A. (1993): «Protoquantitative origins of ratio reasoning». Στο: CARPENTER, T.P. – FENNEMA, E. – ROMBERG, T.A. (Επιμ.): *Rational numbers: An integration of research* (σσ. 107-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- RILEY, M. – GREENO, J.G. – HELLER, J.I. (1983): «Development of children's solving ability in arithmetic». Στο: GINSBURG, H. (Επιμ.): *The development of mathematical thinking* (σσ. 153-196).
- RITTER-JOHNSON, B. – SINGER, R.S. (1998): «The relationship between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review». Στο: DONLAN, C. (Επιμ.): *The Development of Mathematical Skills*. Hove: Psychology Press.
- SOPHIAN, C. – GARYANTES, D. – CHANG, C. (1997): «When three is less than two: Early understanding of fractional quantities». *Developmental Psychology*, 33 (5), 731-744.
- STRAUSS, S. – STAVY, R. (1982): «U-shaped behavioral growth: Implications for theories of development». Στο: HARPUT, W. (Επιμ.): *Review of child development research* (σσ. 289-325). Hillsdale, NJ: Erlbaum.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Ο σχεδιασμός της μελέτης

Προβλήματα	Πειραματικές συνθήκες		
	Ταυτόσημοι διαιρέτες	Διαφορετικοί διαιρέτες	Διαφορετικοί διαιρετέοι
Μερισμού	12:2 με 12:2 12:6 με 12:6 24:3 με 24:3 24:4 με 24:4	12:2 με 12:4 12:3 με 12:6 24:4 με 24:6 24:3 με 24:2	12:2 με 24:2 12:3 με 24:3 12:4 με 24:4 12:6 με 24:6
Διάρθρωση ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης	12:3 με 12:3 12:4 με 12:4 24:2 με 24:2 24:6 με 24:6	12:4 με 12:6 12:3 με 12:2 24:2 με 24:4 24:3 με 24:6	12:4 με 24:4 12:6 με 24:6 12:2 με 24:2 12:3 με 24:3

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Η βαθμολογία των παιδιών ανά πειραματική συνθήκη στα προβλήματα μερισμού

Πειραματικές συνθήκες	Βαθμολογία				
	0	1	2	3	4
Ταυτόσημοι διαιρέτες	—	1	2	—	27
Διαφορετικοί διαιρέτες	12	1	3	1	13
Διαφορετικοί διαιρετέοι	2	2	1	—	25

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Η βαθμολογία των παιδιών ανά πειραματική συνθήκη στα προβλήματα διάρθρωσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης

Πειραματικές συνθήκες	Βαθμολογία				
	0	1	2	3	4
Ταυτόσημοι διαιρέτες	—	1	2	1	26
Διαφορετικοί διαιρέτες	18	1	2	—	9
Διαφορετικοί διαιρετέοι	—	2	3	—	25

ΠΙΝΑΚΑΣ 4: Τα ποσοστά των διαφορετικών αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά που πέτυχαν ή απέτυχαν στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών στα προβλήματα μερισμού

Επίδοση	Τύποι αιτιολογήσεων		
	Μη σχετικές με το πρόβλημα	Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρετέου και πηλίκου	Σύνολο
Παιδιά που πέτυχαν	3%	97%	100%
Παιδιά που απέτυχαν	94%	6%	100%

ΠΙΝΑΚΑΣ 5: Τα ποσοστά των διαφορετικών αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά που πέτυχαν ή απέτυχαν στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών στα προβλήματα μερισμού

Επίδοση	Τύποι αιτιολογήσεων				
	Μη σχετικές με το πρόβλημα	Επικεντρωμένες στην ισότητα των διαιρετών	Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρέτη και πηλίκου	Επικεντρωμένες στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου	Σύνολο
Παιδιά που πέτυχαν	4%	—	—	96%	100%
Παιδιά που απέτυχαν	12%	5%	93%	—	100%

ΠΙΝΑΚΑΣ 6: Τα ποσοστά των διαφορετικών αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά που πέτυχαν ή απέτυχαν στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετέων στα προβλήματα διαιρέσης ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεσης

Επίδοση	Τύποι αιτιολογήσεων		
	Μη σχετικές με το πρόβλημα	Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρετέου και πηλίκου	Σύνολο
Παιδιά που πέτυχαν	5%	95%	100%
Παιδιά που απέτυχαν	93%	7%	100%

ΠΙΝΑΚΑΣ 7: Τα ποσοστά των διαφορετικών αιτιολογήσεων που έδωσαν τα παιδιά που πέτυχαν ή απέτυχαν στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετέων στα προβλήματα διαιρέσης ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεσης

Επίδοση	Τύποι αιτιολογήσεων				
	Μη σχετικές με το πρόβλημα	Επικεντρωμένες στην ισότητα των διαιρετέων	Επικεντρωμένες στην ανάλογη σχέση διαιρέτη και πηλίκου	Επικεντρωμένες στην αντίστροφη σχέση διαιρέτη και πηλίκου	Σύνολο
Παιδιά που πέτυχαν	7%	—	—	93%	100%
Παιδιά που απέτυχαν	2%	5%	93%	—	100%

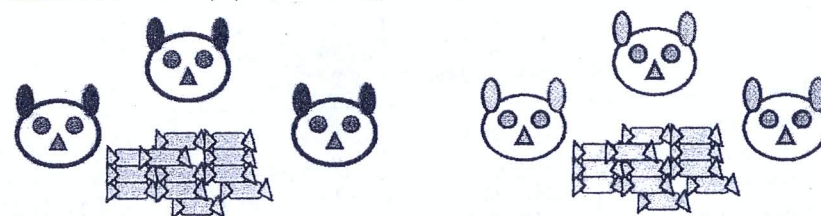
ΠΙΝΑΚΑΣ 8: Η επίδοση των παιδιών στο προτέστ και το μετατέστ στα προβλήματα μερισμού και πρόσθεσης ανά πειραματική ομάδα

Ομάδα	Προτέστ		Μετατέστ	
	Πρόσθεση	Διαίρεση	Πρόσθεση	Διαίρεση
Ελέγχου	19	8	18	8
Παρέμβασης Ι	17	7	18	11
Παρέμβασης ΙΙ	18	9	17	16

ΠΙΝΑΚΑΣ 9: Η επίδοση των παιδιών στο προτέστ και το μετατέστ στα προβλήματα διαιρέσης ως επαναλαμβανόμενη αφαίρεσης και πρόσθεσης ανά πειραματική ομάδα

Ομάδα	Προτέστ		Μετατέστ	
	Πρόσθεση	Διαίρεση	Πρόσθεση	Διαίρεση
Ελέγχου	16	5	18	5
Παρέμβασης Ι	18	6	17	12
Παρέμβασης ΙΙ	17	5	16	13

ΕΙΚΟΝΑ 1: Η συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετέων στα προβλήματα μερισμού



Η καφέ μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της

Η πολική μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της

Θα πάρουν τα καφέ αρκουδάκια τις ίδιες καραμέλες με τα λευκά;
Ποια νομίζεις ότι θα πάρουν περισσότερες;

ΕΙΚΟΝΑ 2: Η συνθήκη των διαφορετικών διαιρετέων στα προβλήματα μερισμού

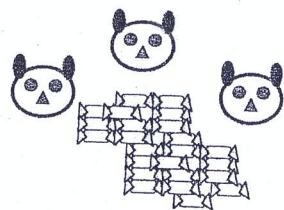


Η καφέ μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της

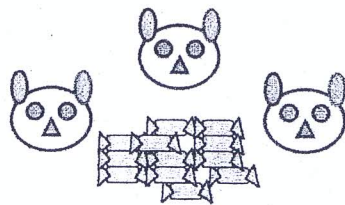
Η πολική μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες στα 2 αρκουδάκια της

Θα πάρουν τα καφέ αρκουδάκια τις ίδιες καραμέλες με τα λευκά;
Ποια νομίζεις ότι θα πάρουν περισσότερες;

ΕΙΚΟΝΑ 3: Η συνθήκη των διαφορετικών διαιρετέων στα προβλήματα μερισμού



Η καφέ μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 24 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της



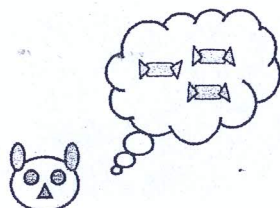
Η πολική μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες στα 3 αρκουδάκια της

Θα πάρουν τα καφέ αρκουδάκια τις ίδιες καραμέλες με τα λευκά;
Ποια νομίζεις ότι θα πάρουν περισσότερες;

ΕΙΚΟΝΑ 4: Η συνθήκη διαφορετικών διαιρετών στα προβλήματα διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης



Η καφέ μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες της ανά 2 στα κουτάκια της



Η πολική μαμά αρκούδα θα μοιράσει τις 12 καραμέλες της ανά 3 στα κουτάκια της

Θα γεμίσει η καφέ αρκούδα τα ίδια κουτάκια με την πολική;
Ποια νομίζεις ότι θα γεμίσει περισσότερα;

Περίληψη

Αικατερίνη Κορνηλάκη: Η κατανόηση των πρώτων διαιρετικών σχέσεων από τα μικρά παιδιά

Η έρευνα αυτή εξετάζει τις απαρχές κατανόησης διαιρετικών σχέσεων σε παιδιά ηλικίας 5 ετών. Το πρώτο πείραμα μελετά την κατανόηση της ανάλογης σχέσης του διαιρετέου και του πηλίκου και της αντίστροφης σχέσης του διαιρέτη και του πηλίκου σε μη υπολογιστικά προβλήματα μερισμού και διαίρεσης ως επαναλαμβανόμενης αφαίρεσης. Βρέθηκε ότι η κατανόηση της ανάλογης σχέσης διαιρετέου-πηλίκου προηγείται αυτής της αντιστρόφου σχέσης διαιρέτη-πηλίκου. Το δεύτερο πείραμα εξετάζει κατά πόσον η εμπειρία του μοιράσματος μπορεί να προαγάγει την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου. Βρέθηκε ότι τόσο η εμπειρία του μοιράσματος όσο και η δυνατότητα σύγκρισης του πηλίκου διαφορετικών διαιρέσεων μπορεί να συμβάλει στην κατανόηση των διαιρετικών σχέσεων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι απαρχές κατανόησης των διαιρετικών εννοιών βρίσκονται στο σχήμα δράσης του μερισμού και ότι η ανάπτυξή τους προηγείται κατά πολύ της εισαγωγής τους στο σχολείο.

Abstract

Katerina Kornilaki: Young childrens understanding of sharing relations in the context of division problems

The study investigates young childrens understanding of the relations between the division terms. Study I examined childrens understanding of a) the direct relation between the dividend and the quotient (the larger the quantity to be shared is, the larger the shares would be) and b) the inverse relation between the divisor and the quotient (the more the recipients are, the less each would get) in the context of partitive and quotitive division problems. It was found that the understanding of the direct dividend-quotient relation preceded the understanding of the inverse divisor-quotient relation. Study II investigated how childrens understanding of the inverse divisor-quotient relation can be improved. It was found both the experience of sharing and the opportunity to observe the outcomes of different partitionings can enhance childrens understanding of sharing relations.