

Προβλήματα ή ασκήσεις; Τι κατανοούν καλύτερα τα παιδιά

· Αικατερίνη Ν. Κορνηλάκη

1. Εισαγωγή

Οι πρώτες αριθμητικές πράξεις, με τις οποίες τα παιδιά έρχονται σε επαφή με την είσοδό τους στο νηπιαγωγείο, είναι αυτές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Ακόμα και αν τα παιδιά δε “διδάσκονται” πώς να προσθέτουν και να αφαιρούν με την κλασική έννοια του όρου, μέσα από καταστάσεις προβληματισμού προσεγγίζουν βασικούς λογικο-μαθηματικούς συλλογισμούς, που έχουν σχέση με τις έννοιες των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (ΥΠ.Ε.Π.Θ., χχ, σελ. 243). Τα νοητικά σχήματα που σχετίζονται με την πρόσθεση και την αφαίρεση είναι πολύ κοντά στις καθημερινές εμπειρίες των παιδιών και δεν περιορίζονται στα ερεθίσματα που παρέχει μόνο το νηπιαγωγείο. Τα παιδιά όχι μόνο βλέπουν, αλλά και συμμετέχουν τα ίδια σε διαδικασίες, που έχουν ως σκοπό την αύξηση ή τη μείωση μιας ποσότητας. Τα παιδιά ξέρουν τι πρέπει να κάνουν για να αυξήσουν μια ποσότητα που έχουν και κατανοούν ότι, αν κάποιος τους αφαιρέσει μέρος της ποσότητας αυτής η ποσότητα τους θα μειωθεί. Με τον τρόπο αυτό το παιδί αναπτύσσει τα πρώτα σχήματα αύξησης και μείωσης μιας ποσότητας (protoquantitative increase/decrease schema) τα οποία κατά τους Singer, Kohn & Resnick (1997, σελ. 116) θέτουν τα θεμέλια για την κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

Φαίνεται λοιπόν ότι οι αριθμοί και οι πράξεις αποκτούν νόημα μέσα από ρεαλιστικές καταστάσεις προβληματισμού. Διαφορετικά, ενδέχεται να θεωρηθούν μια πνευματική άσκηση χωρίς να είναι εμφανές στο παιδί, γιατί πρέπει αυτό να εμπλακεί στη διαδικασία εκμάθησής τους. Όταν η Munn (1997, σελ. 14) ρώτησε παιδιά προσχολικής ηλικίας αν ξέρουν να μετρούν και για ποιο λόγο μετρούν, βρήκε ότι τα παιδιά αυτά δεν κατανοούσαν την αναγκαιότητα μιας διαδικασίας που κατείχαν τόσο καλά. Συχνά μάλιστα απαντούσαν ότι το έκαναν, για να ευχαριστήσουν τους γονείς τους και όσους τα ρωτούσαν αν ξέρουν να μετρούν!

Τα ευρήματα αυτά, όπως και αυτά άλλων ερευνών, δείχνουν την αναγκαιότητα παρουσίασης των αριθμών και των πράξεων μέσα σε ένα πλαίσιο στήριξής τους. Τα παιδιά φαίνεται να κατανοούν τους αριθμούς πολύ καλύτερα, όταν αυτοί αναφέρονται σε αντικείμενα (Nunes & Bryant, 1996,

σελ. 122). Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξε και ο Hughes (1986, σελ. 30-32), ο οποίος εξέτασε τη δυσκολία που παρουσιάζει η πρόσθεση και η αφαίρεση, όταν οι εμπλεκόμενοι αριθμοί δίνονται χωρίς να περιγράφουν μια κατάσταση. Ο Hughes εξέτασε παιδιά ηλικίας 3-5 ετών σε τέσσερις πειραματικές συνθήκες. Στην πρώτη συνθήκη, τη ρεαλιστική, μέτρησαν πόσα τουβλάκια υπήρχαν μέσα σε ένα κουτί και στη συνέχεια μέτρησαν πόσα τουβλάκια έμεναν μετά τις προσθέσεις ή τις αφαιρέσεις του ερευνητή. Σημειωτέον ότι το κουτί ήταν κλειστό και δεν μπορούσαν να μετρήσουν άμεσα τα τουβλάκια που ήταν μέσα. Στη δεύτερη συνθήκη δόθηκαν στα παιδιά παρόμοια προβλήματα, με τη διαφορά ότι αυτή τη φορά έπρεπε να φανταστούν την ύπαρξη του κουτιού, μέσα στο οποίο ο ερευνητής έβαζε και έβγαζε τα τουβλάκια. Στην τρίτη συνθήκη, αυτή του "φανταστικού μαγαζιού", τα παιδιά έπρεπε να φανταστούν την ύπαρξη ενός μαγαζιού, στο οποίο π.χ. υπήρχαν 2 παιδιά, να φανταστούν την άφιξη 1 ακόμα παιδιού και να υπολογίσουν τον τελικό αριθμό παιδιών μέσα στο μαγαζί. Η λογική της τρίτης συνθήκης ήταν η ίδια με αυτή της δεύτερης, με μόνη διαφορά στο περιεχόμενο της φανταστικής ιστορίας. Τέλος, στην τέταρτη συνθήκη δόθηκαν στα παιδιά ανάλογες ασκήσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης, π.χ. πόσο κάνει 2 και 1, στις οποίες όμως οι αριθμοί δεν περιέγραφαν την πληθικότητα κάποιων αντικειμένων ή προσώπων, όπως παραπάνω. Αν και τα προβλήματα των παραπάνω συνθηκών ήταν της αυτής δυσκολίας από πλευράς αριθμητικών υπολογισμών, διέφεραν ως προς το αντικείμενο αναφοράς των αριθμών, το οποίο άλλοτε ήταν συγκεκριμένο, άλλοτε φανταστικό ή απόν. Το μόνο υλικό που μπορούσαν τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν για να λύσουν τα προβλήματα αυτά ήταν τα δάκτυλά τους. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι, ακόμα και όταν οι εμπλεκόμενοι αριθμοί ήταν μικροί, η υψηλότερη επίδοση σημειώθηκε στη ρεαλιστική συνθήκη (83%) και η χαμηλότερη στην τέταρτη συνθήκη των αριθμητικών ασκήσεων (15%), ενώ το ποσοστό επιτυχίας στη συνθήκη του φανταστικού κουτιού και του φανταστικού μαγαζιού ήταν 56% και 62% αντίστοιχα. Η διακύμανση αυτή στην επίδοση των παιδιών φανερώνει, κατά τους Nunes & Bryant (1996, σελ. 124), ότι ο απλός διαχωρισμός ανάμεσα στη συγκεκριμένη και αφηρημένη σκέψη δεν είναι αρκετός για την αιτιολόγηση των αποτελεσμάτων, γιατί το φανταστικό κουτί και μαγαζί δεν είναι κάτι το χειροπιαστό, αλλά όμως τα παιδιά αποδίδουν καλύτερα σε αυτά τα προβλήματα από ό,τι στις αριθμητικές ασκήσεις. Και αυτό, γιατί ακόμα και το φανταστικό πλαίσιο του προβλήματος προσδίδει νόημα στους εμπλεκόμενους αριθμούς και υποδεικνύει σε τι είδους νοητικές ενέργειες πρέπει να προβεί το παιδί προκειμένου να το λύσει.

Αν και δεν υπάρχουν άλλες παρόμοιες μελέτες που να συγκρίνουν την επίδοση των παιδιών σε λεκτικά προβλήματα και αριθμητικές ασκήσεις, ωστόσο, πολλές μελέτες έχουν δείξει ότι τα παιδιά του νηπιαγωγείου τα καταφέρνουν αρκετά καλά στην επίλυση λεκτικών προβλημάτων και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (Carpenter & Moser, 1982, 1983· Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993· Kouba, 1989· Riley, Greeno & Heller, 1983). Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να επεκτείνει τη μελέτη του Hughes (1986) και να συγκρίνει την επίδοση των παιδιών σε λεκτικά προβλήματα και αριθμητικές ασκήσεις όχι μόνο πρόσθεσης και αφαίρεσης αλλά και πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Τα παιδιά που πήραν μέρος στη μελέτη του Hughes (1986) ήταν ως επί το πλείστον μικρά νήπια. Ίσως η διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στα λεκτικά προβλήματα και τις αριθμητικές ασκήσεις να μην υφίσταται, όταν τα παιδιά θα είναι ηλικιακά μεγαλύτερα κατά ένα έτος και θα έχουν κατανοήσει σε μεγαλύτερο βαθμό τους αριθμούς και τους μετασχηματισμούς σε αυτούς. Αυτό ίσως να δικαιολογεί την ιδιαίτερη έμφαση που δίνεται στο δημοτικό σχολείο στις αριθμητικές ασκήσεις σε σχέση με τα αριθμητικά προβλήματα. Τα προγράμματα διδασκαλίας των μαθηματικών εξασκούν τα παιδιά σε ποικίλες αριθμητικές ασκήσεις. Τα λεκτικά προβλήματα ακολουθούν τη διδασκαλία των αριθμητικών ασκήσεων ως εφαρμογές τους, ενώ, όπως παρατηρεί και ο Λεμονίδης (1994, σελ. 160-161), θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην πρώτη φάση διδασκαλίας των πράξεων για να ενισχύσουν την κατανόησή τους. Η μελέτη αυτή εξετάζει κατά πόσο η λογική που ακολουθούν τα σχολικά προγράμματα βρίσκεται σε αρμονία και συμβαδίζει με τις ψυχολογικές ανάγκες των παιδιών.

2. Μεθοδολογία

2.1 Υποκείμενα

Στη μελέτη έλαβαν μέρος 30 νήπια (17 αγόρια και 13 κορίτσια) μέσης ηλικίας 6,01 ετών (ηλικιακό εύρος από 5,10-6,03 ετών) τα οποία παρακολουθούσαν 3 δημόσια νηπιαγωγεία της πόλης του Ηρακλείου.

Τα 30 νήπια που πήραν μέρος στη μελέτη επιλέχθηκαν από ένα ευρύτερο δείγμα 39 νηπίων. Απαραίτητη προϋπόθεση για να πάρουν τα παιδιά μέρος στην έρευνα ήταν να ξέρουν πώς να μετρούν και να απαριθμούν μέχρι το 10. Με αυτό τον τρόπο αποκλειόταν η πιθανότητα να αποτύχουν τα παιδιά στις αριθμητικές ασκήσεις και τα λεκτικά προβλήματα λόγω δυσκολιών στην αρίθμηση και απαρίθμηση.

2.2 Υλικό

Το υλικό της έρευνας αποτελούνταν από 20 κουμπάκια, τα οποία τα παιδιά μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν, για να αναπαραστήσουν τις ποσότητες που περιγράφονταν στα λεκτικά προβλήματα και τις αριθμητικές ασκήσεις.

2.3 Σχεδιασμός

Για να συγκρίνουμε την επίδοση των παιδιών στο πλαίσιο των αριθμητικών ασκήσεων και των λεκτικών προβλημάτων τα παιδιά εξετάστηκαν σε δύο σετ δραστηριοτήτων.

Η πρώτη δραστηριότητα περιλάμβανε μια σειρά λεκτικών προβλημάτων και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Τα προβλήματα πρόσθεσης ήταν του τύπου ένωσης (join problems), στα οποία σύμφωνα με τους Riley, Greeno & Heller (1983, σελ. 163) τα παιδιά σημειώνουν ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό επιτυχίας. Τα προβλήματα αφαίρεσης ανήκαν στην κατηγορία των προβλημάτων διαχωρισμού (separate problems), τα οποία κατά τους Riley et al. (1983, σελ. 163) είναι εύληπτα από τα μικρά παιδιά. Τα προβλήματα πολλαπλασιασμού ανήκαν στην κατηγορία ίσων ομάδων (equal groups multiplication problems), ενώ τα προβλήματα διαίρεσης στην κατηγορία των προβλημάτων μερισμού (partitive division) για το λόγο ότι αυτοί οι τύποι προβλημάτων είναι πιο κατανοητοί και πιο κοντά στην καθημερινή εμπειρία των παιδιών (English & Hartford, 1995, σελ. 196· Nesher, 1992, σελ. 198 & 206).

Το δεύτερο σετ δραστηριοτήτων περιλάμβανε μια σειρά αριθμητικών ασκήσεων στην πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Σκοπός μας ήταν να εξετάσουμε αν τα παιδιά μπορούσαν να λύσουν αριθμητικές ασκήσεις, στις οποίες οι αριθμοί δεν αναφέρονται σε αντικείμενα και δεν περιγράφουν μια κατάσταση.

Για να διευκολύνουμε τα παιδιά στην επίλυση των προβλημάτων και των ασκήσεων φροντίσαμε, ώστε οι εμπλεκόμενοι αριθμοί και οι τελικές τιμές να κινούνται μέσα στα πλαίσια της πρώτης δεκάδας. Άλλωστε, σκοπός μας δεν ήταν να δυσκολέψουμε τα παιδιά με δύσκολους αριθμητικά υπολογισμούς, αλλά να εξετάσουμε αν μπορούν να προσεγγίσουν τα προβλήματα και τις ασκήσεις που τους δόθηκαν.

Τα μισά από τα υποκείμενα άρχισαν από τη λύση των προβλημάτων και τα άλλα μισά από τη λύση των ασκήσεων, για να μην επηρεαστεί η απόδοση των παιδιών από τη σειρά επίδοσης των προβλημάτων. Επειδή δεν μπορούσαμε να ρωτήσουμε τον ίδιο συνδυασμό αριθμών και ως πρόβλημα και ως άσκηση φροντίσαμε, ώστε η άσκηση και το πρόβλημα μας πράξης να είναι

της αυτής περίπου δυσκολίας. Μάλιστα εναλλάσσαμε συστηματικά τους συνδυασμούς. Π.χ. στην πρόσθεση το $5+3$ άλλοτε δινόταν ως άσκηση και άλλοτε ως πρόβλημα. Τα προβλήματα και οι ασκήσεις δόθηκαν σε τυχαία σειρά.

Τα προβλήματα και οι ασκήσεις που δόθηκαν στα παιδιά φαίνονται στον πίνακα 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1: Ο σχεδιασμός της μελέτης	
Αριθμητικές Ασκήσεις	Προβλήματα
$5+3=;$	$6+3=;$ Η Μαρία είχε 6 μολύβια. Η Ελένη της έδωσε ακόμα 3. Πόσα μολύβια έχει τώρα η Ελένη;
$8-2=;$	$7-2=;$ Ο Ανδρέας είχε 7 καραμέλες. Έδωσε τις 2 στο Νίκο. Πόσες καραμέλες του έμειναν;
$3 \times 2=;$	$4 \times 2=;$ Η Άννα έχει 4 σακουλάκια. Κάθε σακουλάκι έχει μέσα 2 γλειφιτζούρια. Πόσα γλειφιτζούρια έχει όλα μαζί;
$6:2=;$	$8:2=;$ Ο Γιάννης έχει 8 σοκολάτες. Θέλει να τις μοιράσει όλες σε 2 φίλους του. Πόσες σοκολάτες θα πάρει ο καθένας;

2.4 Διαδικασία

Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά στο χώρο του σχολείου τους. Η εξέταση έγινε το μήνα Μάιο, όταν πια τα παιδιά ήταν στο τέλος της σχολικής τους χρονιάς, μερικούς μήνες προτού εισαχθούν στο δημοτικό σχολείο. Η εξετάστρια είπε στα παιδιά ότι θα έπαιζαν μαζί ένα παιχνίδι με τους αριθμούς και τα ρώτησε αν γνωρίζουν να μετρούν. Μάλιστα για να τα ενθαρρύνει, άρχισαν να λένε μαζί τους πρώτους αριθμούς της αριθμητικής ακολουθίας (ένα, δύο, τρία...). Μετά, για να είναι βέβαιο ότι τα παιδιά ήξεραν να απαριθμούν, τους ζητήθηκε να δώσουν στην εξετάστρια x κουμπάκια από ένα πανεράκι που τα περιείχε. Με αυτές τις διαδικασίες έγινε η επιλογή των παιδιών που θα έπαιρναν μέρος στη μελέτη.

Στη δραστηριότητα των λεκτικών προβλημάτων η εξετάστρια διάβασε το κάθε πρόβλημα στα παιδιά όσες φορές έκρινε αυτή απαραίτητο για την κατανόησή του. Κάθε παιδί είχε στη διάθεσή του κουμπάκια, τα οποία μπορούσαν να το βοηθήσουν να μοντελοποιήσει τα δεδομένα του προβλήματος.

Με τον ίδιο τρόπο δόθηκαν και οι αριθμητικές ασκήσεις. Οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερη δυσκολία στη διατύπωσή τους. Π.χ. οι ερωτήσεις που θέσαμε στα παιδιά ήταν του τύπου “πόσο κάνουν 5 και 3” ή “από το 8, αν βγάλουμε 2, πόσα μένουν;”. Οι όροι “συν”, “πλην” ή “μείον” αποφεύχθηκαν, για το λόγο ότι δεν έχουν νόημα για τα μικρά παιδιά. Στις ασκήσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης προβληματιστήκαμε για το πώς θα τις διατυπώναμε με τον καλύτερο τρόπο, αφού και εδώ η ορολογία “επί” και “διά” στερείται νοήματος για το παιδί. Τελικά, τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης διατυπώθηκαν ως εξής: “αν πάρεις το 3 δύο φορές, πόσο κάνει;” και “μπορείς να μοιράσεις το 8 στα δύο; πόσο κάνει;”.

Σε περίπτωση που το παιδί βρισκόταν σε αδιέξοδο η ερευνήτρια το ρωτούσε αν θυμόταν το πρόβλημα/άσκηση. Αν το παιδί δεν μπορούσε να το λύσει, τότε προχωρούσε στο επόμενο πρόβλημα/άσκηση. Τα παιδιά ενθαρρύνονταν στις προσπάθειές τους χωρίς όμως να τους δίνεται ανατροφοδότηση για την ορθότητα ή μη των απαντήσεών τους. Οι απαντήσεις των παιδιών καταγράφονταν, όπου φυσικά αυτό ήταν δυνατό, για το λόγο ότι όταν τα παιδιά έβρισκαν τη λύση με το μυαλό τους δεν ήταν παρατηρήσιμη η διαδικασία που ακολουθούσαν. Σε αυτές τις περιπτώσεις η εξετάστρια ζητούσε από το παιδί να της εξηγήσει τι σκέφτηκε μέσα στο μυαλουδάκι του.

3. Αποτελέσματα

Ποσοτική Ανάλυση

Στη μελέτη αυτή μας ενδιέφερε πρωτίστως αν τα παιδιά μπορούσαν να προσεγγίσουν και να κατανοήσουν τα λεκτικά προβλήματα και τις αριθμητικές ασκήσεις και όχι μόνο αν έδωσαν τη σωστή τελική απάντηση. Υπήρχε περίπτωση τα παιδιά να κατανοήσουν την ερώτηση που τους θέσαμε, να έχουν τη σωστή μέθοδο εξεύρεσης λύσης, αλλά στην πορεία να κάνουν κάποιο αριθμητικό λάθος. Για το λόγο αυτό χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με την επίδοσή τους: α) σε αυτά που έδωσαν τη σωστή απάντηση, β) σε αυτά που είχαν τη σωστή μέθοδο προσέγγισης, αλλά που η τελική απάντησή τους ήταν λανθασμένη λόγω κάποιου αριθμητικού υπολογισμού και γ) σε αυτά που έδωσαν τυχαίες, λανθασμένες ή του τύπου “δεν ξέρω” απαντήσεις, λόγω έλλειψης αποτελεσματικών μεθόδων λύσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2: Η κατανομή της επίδοσης των νηπίων σε κάθε τύπο προβλήματος			
	Σωστή στρατηγική σωστή απάντηση	Σωστή στρατηγική λανθασμένη απάντηση	Τυχαίες & λανθασμένες απαντήσεις
Αριθμητικές Ασκήσεις	f (%)	f (%)	f (%)
Πρόσθεση	19 (63%)	3 (10%)	8 (27%)
Αφαίρεση	16 (54%)	4 (13%)	10 (33%)
Πολ/σμός	7 (23%)	-	23 (77%)
Διαίρεση	6 (20%)	2 (7%)	22 (73%)
Αριθμητικά Προβλήματα			
Πρόσθεση	24 (80%)	4 (13%)	2 (7%)
Αφαίρεση	25 (83%)	5 (17%)	-
Πολ/σμός	17 (57%)	2 (7%)	11 (36%)
Διαίρεση	19 (63%)	2 (7%)	9 (30%)

Όπως φαίνεται και από τα αποτελέσματα του Πίνακα 2, από τις αριθμητικές ασκήσεις μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας συγκέντρωσαν οι ασκήσεις πρόσθεσης (63%) και αφαίρεσης (54%), τις οποίες έλυσαν με επιτυχία πάνω από τα μισά παιδιά. Αν δε συμπεριλάβουμε και τα παιδιά που είχαν μεν τη σωστή στρατηγική, αλλά έκαναν κάποιο αριθμητικό λάθος κατά την εξεύρεση λύσης, τότε περίπου τα 2/3 του δείγματός μας μπορούσαν να προσεγγίσουν αυτές τις αριθμητικές ασκήσεις. Τις ασκήσεις όμως πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, που φαίνεται να είναι της αυτής δυσκολίας, έλυσε περίπου από το 1/5 του δείγματος. Η διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στις ασκήσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης με αυτές του πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ήταν στατιστικά σημαντική ($p < .05$).

Παρόμοια ήταν η τάση των αποτελεσμάτων με τα αριθμητικά προβλήματα. Η πλειοψηφία των παιδιών έλυσε χωρίς δυσκολία τα προβλήματα πρόσθεσης (80%) και αφαίρεσης (84%), ενώ ακόμα και τα παιδιά που δεν έδωσαν τη σωστή απάντηση είχαν τη σωστή στρατηγική λύσης των προβλημάτων. Ήταν μόνο δύο τα παιδιά που απέτυχαν στα προβλήματα πρόσθεσης. Ακολουθούν σε βαθμό ευκολίας τα προβλήματα διαίρεσης (63%) και έπονται τα προβλήματα πολλαπλασιασμού (57%).

Η σύγκριση ανάμεσα στις αριθμητικές ασκήσεις και τα λεκτικά προβλήματα δείχνει ότι η επίδοση των παιδιών ήταν χαμηλότερη στις ασκήσεις. Αν και περισσότερα παιδιά επέλυσαν τα προβλήματα πρόσθεσης σε σχέση με εκείνα που έλυσαν τις αντίστοιχες ασκήσεις, ωστόσο η διαφορά στην επίδοση με το τεστ McNemar ήταν οριακά μη σημαντική ($p < .06$). Όμως η διαφο-

ρά ανάμεσα στα προβλήματα και τις ασκήσεις αφαίρεσης ήταν σημαντική ($p < .004$) καθώς και η διαφορά ανάμεσα στα προβλήματα και τις ασκήσεις πολλαπλασιασμού ($p < .002$) και διαίρεσης ($p < .005$).

Ποιοτική ανάλυση

Στόχος της μελέτης μας ήταν να μη μείνουμε μόνο σε μια επιφανειακή παρουσίαση των ποσοστών επιτυχίας των παιδιών στους διάφορους τύπους των προβλημάτων, αλλά να εξετάσουμε και το πώς έλυσαν τα προβλήματα και τις ασκήσεις που τους δόθηκαν.

Σε γενικές γραμμές οι στρατηγικές επίλυσης που ακολούθησαν τα παιδιά ανήκουν στις εξής κατηγορίες:

α. Διαδικασίες άμεσης μοντελοποίησης (direct modeling)

Τα νήπια που ακολούθησαν αυτή τη μέθοδο επίλυσης αναπαράστησαν είτε με τα δάκτυλά τους είτε με τα κουμπάκια τα δεδομένα του προβλήματος. Π.χ. στο πρόβλημα της αφαίρεσης: "Ο Ανδρέας είχε 7 καραμέλες. Έδωσε τις 2 στο Νίκο. Πόσες καραμέλες του έμειναν;" τα παιδιά πήραν 7 κουμπάκια, αφαίρεσαν τα 2 και μέτρησαν το υπόλοιπο. Στην παραπάνω λύση βλέπουμε ότι οι ενέργειες των παιδιών αναπαριστούν τις ενέργειες που περιγράφονται στο πρόβλημα. Όσο και αν η διαδικασία αυτή φαίνεται να μην ξεφεύγει από το συγκεκριμένο, ωστόσο περιέχει κάποιο βαθμό αφαίρεσης, αφού όπως σημειώνει ο Vergnaud (1987, σελ. 50) "το παιδί καταλαβαίνει ότι το αποτέλεσμα της πράξης $3 + 3 = 6$ παραμένει το ίδιο ανεξάρτητα από το αν οι προστιθέμενες ποσότητες είναι μπίλιες, καραμέλες ή βήματα". Στην περίπτωση μας το παιδί κατανοεί ότι το αποτέλεσμα με τα κουμπάκια θα είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα με τις καραμέλες.

β. Νοερά αρίθμηση

Τα παιδιά που έλυσαν τα προβλήματα και τις ασκήσεις με νοερά αρίθμηση δε χρησιμοποίησαν τα κουμπάκια, αλλά έκαναν τους σχετικούς υπολογισμούς όπως δήλωναν και τα ίδια "με το μυαλό" τους. Κάποια από τα παιδιά έλεγαν δυνατά τους συλλογισμούς τους. Π.χ. στο πρόβλημα: "Η Άννα έχει 4 σακουλάκια. Κάθε σακουλάκι έχει μέσα 2 γλειφιτζούρια. Πόσα γλειφιτζούρια έχει όλα μαζί;" κάποια παιδιά μέτρησαν 1, 2, (παύση), 3, 4, (παύση), 5, 6, (παύση) 7, 8!, ενώ άλλα μέτρησαν με πολλαπλάσια 2, 4, 6, 8!

γ. Άμεση ανάκληση

Κάποια παιδιά γνώριζαν τα αποτελέσματα των αριθμητικών πράξεων

και τα ανακαλούσαν αμέσως από τη μνήμη τους. Έτσι στο πρόβλημα πρόσθεσης “Η Μαρία είχε 6 μολύβια. Η Ελένη της έδωσε ακόμα 3. Πόσα μολύβια έχει τώρα η Ελένη;”, όταν ρωτήθηκε το νήπιο πώς βρήκε τη λύση, είπε γιατί $6+3$ κάνουν 9.

Αξιίζει να σημειώσουμε ότι δεν είναι πάντα εύκολο να γνωρίζουμε το πώς τα παιδιά έφτασαν στη λύση του προβλήματος. Αυτό είναι παρατηρήσιμο όταν τα παιδιά χρησιμοποιούν το υλικό που τους δίνεται ή τα δάκτυλά τους, αλλά όχι όταν ακολουθούν νοερές διαδικασίες και άμεση ανάκληση. Ενδέχεται για παράδειγμα το παιδί να βρει με νοερά αρίθμηση πόσο κάνει $6+3$. Στην ερώτηση όμως του εξεταστή, για το πώς βρήκε την απάντηση, να είπε ότι ξέρει ότι $6+3$ κάνουν 9 και έτσι η απάντησή του να καταχωρηθεί στις στρατηγικές της άμεσης ανάκλησης.

Τα δε παιδιά που δεν έφτασαν στη λύση του προβλήματος είχαν δυσκολίες λόγω έλλειψης αποτελεσματικών μεθόδων λύσης και συχνά έδιναν τυχαίες απαντήσεις ή δήλωναν “δεν ξέρω”. Κάποια άλλα παιδιά επανέλαβαν ως απάντηση στο πρόβλημα κάποιον από τους όρους του προβλήματος.

Στον Πίνακα 3 φαίνεται πώς τα παιδιά έλυσαν τις αριθμητικές ασκήσεις και τα προβλήματα. Όπως διαπιστώνει εύκολα κανείς, η στρατηγική που χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα τόσο στις αριθμητικές ασκήσεις όσο και στα προβλήματα ήταν αυτή της άμεσης μοντελοποίησης. Τα παιδιά έλυσαν τα προβλήματα και τις ασκήσεις πρόσθεσης ενώνοντας δύο σύνολα και μετρώντας το άθροισμά τους. Στα προβλήματα και τις ασκήσεις αφαίρεσης, αφάιρεσαν το ένα υποσύνολο από την αρχική ποσότητα και μέτρησαν το υπόλοιπο. Τα προβλήματα και οι ασκήσεις πολλαπλασιασμού επιλύθηκαν με διαδικασίες αντίστοιχης, ενώ της διαίρεσης με μερισμό της ποσότητας στους αποδέχτες. Πολύ λιγότερα ήταν τα παιδιά που βασίστηκαν σε νοερές διαδικασίες ή στην άμεση ανάκληση. Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι στα προβλήματα πολλαπλασιασμού το 37% των παιδιών έδωσε ως απάντηση κάποιον από τους όρους του προβλήματος. Συνήθως τα παιδιά έδιναν ως απάντηση τον αριθμό καραμελών που περιείχε το ένα μόνο σακουλάκι.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3: Οι στρατηγικές λύσεις που ακολούθησαν τα νήπια σε κάθε τύπο προβλήματος

Αριθμητικές Ασκήσεις	Άμεση μοντελοποίηση	Νοερές διαδικασίες	Άμεση ανάκληση	Επανάληψη όρων	Τυχαίες & λανθασμένες
	f (%)	f (%)	f (%)	f (%)	f (%)
Πρόσθεση	15 (50%)	5 (17%)	2 (7%)	—	8 (26%)
Αφαίρεση	18 (60%)	1 (3%)	1 (3%)	—	10 (34%)
Πολ/σμός	7 (23%)	—	—	8 (27%)	15 (50%)
Διαίρεση	7 (23%)	1 (3%)	—	3 (10%)	19 (64%)
Αριθμητικά Προβλήματα					
Πρόσθεση	21 (70%)	4 (13%)	3 (10%)	—	2 (7%)
Αφαίρεση	26 (87%)	3 (10%)	1 (3%)	—	—
Πολ/σμός	12 (40%)	6 (20%)	1 (3%)	11 (37%)	—
Διαίρεση	20 (67%)	—	1 (3%)	—	9 (30%)

4. Συζήτηση και συμπεράσματα

Σκοπός της μελέτης ήταν να εξετάσει αν η επίδοση των παιδιών στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις επηρεάζεται από τον τρόπο που παρουσιάζεται η ζητούμενη πράξη. Η διαφορά επίδοσης ανάμεσα στα προβλήματα και τις αριθμητικές ασκήσεις ήταν στατιστικά σημαντική για όλες τις πράξεις εκτός από αυτή της πρόσθεσης. Επειδή η διαφορά στην πράξη της πρόσθεσης ήταν οριακή ($p < .06$), ενδεχομένως, αν το δείγμα μας ήταν λίγο μεγαλύτερο και αυτή η διαφορά είναι πολύ πιθανό να προέκυπτε στατιστικώς σημαντική. Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι τα παιδιά της μελέτης μας κατανοούν και αποδίδουν καλύτερα στα λεκτικά προβλήματα παρά τις αριθμητικές ασκήσεις.

Τα ευρήματα της μελέτης μας βρίσκονται σε συμφωνία με αυτά της μελέτης του Hughes (1986). Αν και η άμεση σύγκριση δεν είναι δυνατή λόγω της ηλικιακής διαφοράς των υποκειμένων, εντούτοις κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Τα λεκτικά προβλήματα δεν είναι πιο κατανοητά μόνο για τα παιδιά ηλικίας 3-5 ετών που μελέτησε ο Hughes (1986, σελ. 30-32), αλλά και για τα μεγαλύτερα παιδιά ηλικίας 5,10 - 6,03 ετών που εξετάστηκαν στη δική μας μελέτη. Αυτό δείχνει ότι ακόμα και για τα μεγαλύτερα παιδιά, που είναι πιο ώριμα και έχουν μεγαλύτερη εμπειρία με τους αριθμούς, οι αριθμοί και οι πράξεις σε αυτούς αποκτούν νόημα, όταν έχουν αντικείμενο αναφοράς και χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν μια κατάσταση. Τα απλά λεκτικά προβλήματα, όπως είναι αυτά που δώσαμε στα παιδιά, είναι σαν μικρές ιστο-

ρίες των οποίων το παιδί καλείται να βρει το τέλος. Συχνά υπάρχει μια αρχική κατάσταση, μια ενέργεια που προκαλεί αλλαγή σε αυτή την κατάσταση, ενώ ο ζητούμενος άγνωστος αναφέρεται στο πώς διαμορφώθηκε η αρχική κατάσταση μετά από την αλλαγή. Για το λόγο αυτό η διαδικασία λύσης του προβλήματος γίνεται μια διαδικασία με σκοπό και νόημα. Το παιδί κατανοεί τις ενέργειες που περιγράφονται στο πρόβλημα και οι ενέργειες αυτές θα το καθοδηγήσουν στην επίλυση του προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό η πράξη που εφαρμόζει για να βρει τη λύση αποκτά νόημα.

Αυτό σημαίνει ότι η γνώση δεν υπάρχει ανεξάρτητα από το γενικότερο πλαίσιο μέσα στο οποίο βρίσκεται (situated cognition). Το πλαίσιο είναι αυτό που προσδίδει νόημα στην κάθε πληροφορία. Είναι σίγουρο ότι οι συντεταγμένες του κάθε πλαισίου θα επηρεάσουν τη γνωστική συμπεριφορά του παιδιού. Αν π.χ. η πράξη περιγράφεται στα πλαίσια ενός καλοδομημένου λεκτικού προβλήματος και το παιδί μπορέσει να καταλάβει τις ενέργειες που περιγράφονται στο πρόβλημα, τότε υπάρχει περίπτωση να εκδηλώσει και τη "σωστή" γνωστική συμπεριφορά για την επίλυσή του. Οι αριθμητικές ασκήσεις είναι πιο δύσκολες για τα παιδιά για το λόγο ότι στερούνται αυτού του πλαισίου στήριξης. Τη σημασία των συντεταγμένων του πλαισίου στη γνωστική συμπεριφορά των παιδιών έχει καταδείξει πλήθος ερευνών που συγκλίνουν στην άποψη ότι ο τρόπος που θα δοθεί ένα γνωστικό πρόβλημα στο παιδί θα επηρεάσει σημαντικά τη συμπεριφορά του (Butterworth, 1992· Donaldson 1978, 1987, Goodnow & Warton, 1992· Hatano & Inagaki, 1992· Siegal, 1991).

Τα ευρήματα της μελέτης μας δείχνουν ότι ο καλύτερος τρόπος για να νοηματοδοτήσουμε τις αριθμητικές πράξεις είναι να τις εισάγουμε στα μικρά παιδιά μέσα από λεκτικά προβλήματα. Αυτή μας η διαπίστωση βρίσκεται σε αντίθεση με την έμφαση που δίνεται στη λύση αριθμητικών ασκήσεων στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Τα μικρά παιδιά πρώτα εξασκούνται στην εύρεση αθροισμάτων, υπολοίπων, γινομένων και πηλίκων και μετά, για να εφαρμόσουν και να εδραιώσουν τις γνώσεις που απέκτησαν μέσα από τις αριθμητικές αυτές ασκήσεις, προβαίνουν στη λύση λεκτικών προβλημάτων. Αυτή όμως η πρακτική δε συμβαδίζει με τις ψυχολογικές ανάγκες του παιδιού. Άλλωστε, το να μάθεις να εκτελείς με επιτυχία τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις είναι μεν αναγκαίο, αλλά όχι και επαρκής προϋπόθεση για να λύνεις με επιτυχία αριθμητικά προβλήματα. Συμβαίνει συχνά, προβλήματα που απαιτούν την ίδια ακριβώς πράξη για την επίλυσή τους, να μην είναι της αυτής δυσκολίας για τα παιδιά. Π.χ. το πρόβλημα: "Ο Φίλιππος είχε μερικές μπίλιες. Ο Αλέξης του έδωσε ακόμα 5. Τώρα ο Φίλιππος έχει 8 μπίλιες. Πό-

σες μπίλιες είχε αρχικά ο Φίλιππος;" απαιτεί την ίδια ακριβώς πράξη (8-5) με το πρόβλημα "Ο Φίλιππος είχε 8 μπίλιες. Έδωσε 5 στον Αλέξη. Πόσες μπίλιες έμειναν στο Φίλιππο;". Μπορούμε να πούμε ότι το παιδί που ξέρει την πράξη $8-5=3$ θα λύσει και τα δύο προβλήματα; Όχι, απαραίτητα. Το δεύτερο πρόβλημα είναι πολύ πιο εύκολο από το πρώτο και αυτό γιατί, είναι ένα κλασικό πρόβλημα αφαίρεσης με άγνωστη την τιμή του υπολοίπου, ενώ το πρώτο πρόβλημα έχει σημασιολογικά τη δομή ενός προβλήματος πρόσθεσης με άγνωστη την τιμή του πρώτου προσθετέου, αλλά που λύνεται με αφαίρεση.

Πιστεύουμε ότι η εισαγωγή των αριθμητικών πράξεων μέσα στο πλαίσιο λεκτικών προβλημάτων θα βοηθήσει τα παιδιά να κατανοήσουν τη φύση και το σκοπό της κάθε πράξης. Όμως και τα λεκτικά προβλήματα πρέπει να εισαχθούν με ιδιαίτερη προσοχή. Τα παιδιά φαίνεται να κατέχουν κάποια σχήματα δράσης, τα οποία και ενεργοποιούν κάθε φορά που έχουν να λύσουν κάποιο πρόβλημα. Στη μελέτη μας είδαμε ότι τα παιδιά έλυσαν τα προβλήματα πρόσθεσης ενώνοντας δύο σύνολα, τα προβλήματα αφαίρεσης αφαιρώντας ένα υποσύνολο από την αρχική ποσότητα, τα προβλήματα πολλαπλασιασμού με διαδικασίες πολλαπλής αντιστοιχίας και τα προβλήματα διαίρεσης με μερισμό. Στην περίπτωση δε των προβλημάτων που δώσαμε στα παιδιά, τα παραπάνω σχήματα δράσης μοντελοποιούσαν άμεσα τις ενέργειες που περιγράφονταν στο πρόβλημα. Γι' αυτό άλλωστε και τα περισσότερα παιδιά εφάρμοσαν τη μέθοδο της άμεσης μοντελοποίησης για να τα επιλύσουν. Όμως συχνά, τα παιδιά πρέπει να λύσουν και προβλήματα των οποίων η επιφανειακή δομή είτε δε φανερώνει άμεσα είτε βρίσκεται σε αντίθεση με τη μέθοδο λύσης που πρέπει να ακολουθηθεί. Τέτοια για παράδειγμα είναι η παραπάνω περίπτωση των προβλημάτων πρόσθεσης με άγνωστο τον ένα προσθετέο, τα οποία λύνονται με αφαίρεση. Αυτό σημαίνει ότι η εισαγωγή των παιδιών στις αριθμητικές πράξεις μπορεί και πρέπει να βασιστεί στα προβλήματα εκείνα που μπορούν τα παιδιά να μοντελοποιήσουν άμεσα. Έτσι, θα εδραιώσουν τα γνωστικά σχήματα, που απαιτούνται για την κατανόηση των πράξεων. Όμως, η κάθε πράξη δεν πρέπει να συνδεθεί με ένα μόνο τύπο προβλήματος. Τα παιδιά θα πρέπει να αποκτήσουν ευελιξία στη χρήση των γνωστικών τους σχημάτων και την εφαρμογή των πράξεων. Γι' αυτό, θα πρέπει να έρθουν σε επαφή με προβλήματα, τα οποία θα ποικίλλουν ως προς τη σημασιολογική τους δομή και τη ζητούμενη ποσότητα, ούτως ώστε να περάσουν από την επιφανειακή δομή στην ανακάλυψη των εσωτερικών σχέσεων και δομών που υπάρχουν ανάμεσα στα δεδομένα του κάθε προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Butterworth, G. (1992). Context and cognition in models of cognitive growth. In P. Light & G. Butterworth (Eds.), *Context and Cognition*. London: Harvester.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 7-44). New York: Academic Press.
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (5), 428-441.
- Donaldson, M. (1978). *Children's Mind*. London: Fontana.
- Donaldson, M. (1987). The origins of inference. In J. Bruner & H. Haste (Eds.), *Making Sense: the Child's Construction of the World*. London: Methuen.
- English, L. D. & Halford, G. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goodnow, J. J., & Warton, P. (1992). Contexts and cognitions: taking a pluralist view. In P. Light & Butterworth, G. (Eds.), *Context and Cognition*. London: Harvester.
- Hatano, G. & Inagaki, K. (1992). Dis situating cognition through the construction of conceptual knowledge. In P. Light & Butterworth, G. (Eds.), *Context and Cognition*. London: Harvester.
- Hughes, M. (1986). *Children and Number: Difficulties in Learning Mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.
- Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), 147-158.
- Λεμονίδης, Χ. (1994). *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.
- Munn, P. (1997). Children's beliefs about counting. In I. Thompson (Ed.), *Teaching & Learning Early Number* (pp. 9- 19). Buckingham: The Open University Press.
- Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. In G. Leinhardt, R. T., Putman, & R. Hattrop (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 189-220). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.
- Siegel, M. (1991). *Knowing Children*. Hove: Lawrence Erlbaum Associates.
- Singer, J. A., Kohn, A. S., & Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in Different Contexts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.
- Vergnaud, G. (1987). About constructivism. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 42-54). Montreal: University of Montreal Press.
- Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (xx). Βιβλίο δραστηριοτήτων για το Νηπιαγωγείο. Βιβλίο νηπιαγωγού. Αθήνα: ΟΕΔΒ.