

Προσέγγιση των δεκαδικών αριθμών μέσα από την εμπειρία του ευρώ. Ένα παράδειγμα εννοιολογικής αναδιοργάνωσης της γνώσης των αριθμών

Αικατερίνη Ν. Κορνηλάκη
ekornilaki@edc.uoc.gr

Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της έρευνας ήταν να εξετάσει την προσέγγιση των δεκαδικών αριθμών από τους μικρούς μαθητές, αξιοποιώντας την εισαγωγή του ευρώ στην καθημερινότητά μας, καθώς και να ερευνήσει τον βαθμό γνώσης και εξοικείωσής τους με το νέο νόμισμα το βαθμό γνώσης και εξοικείωσης των παιδιών μέσης σχολικ. Η μελέτη παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς η εισαγωγή του κοινού ευρωπαϊκού νομίσματος είχε ως αποτέλεσμα τα παιδιά να έρχονται σε επαφή με τους δεκαδικούς αριθμούς, νωρίτερα από τον χρόνο διδασκαλίας τους στο σχολείο. Στη διαχρονική μελέτη εξετάσθηκαν 61 παιδιά Β', Γ' και Δ' τάξης του Δημοτικού σε μια σειρά δοκιμασιών σε δύο χρονικές φάσεις: Τον Ιανουάριο του 2002, αμέσως μετά την επίσημη εισαγωγή του ευρώ και τέσσερις περίπου μήνες αργότερα τον Μάιο του 2002. Οι δοκιμασίες ήταν οι ακόλουθες: γραφή και ανάγνωση τιμών, προσδιορισμός τιμών οικείων προς τα παιδιά προϊόντων, πρόσθεση και αφαίρεση τιμών, χρήση των νέων κερμάτων σε καθημερινές συναλλαγές και μετατροπή των δραχμών σε ευρώ και αντίστροφα. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας φανερώνουν σε πρώτο επίπεδο ότι τα παιδιά είχαν ένα ικανοποιητικό και συνεχώς βελτιούμενο βαθμό γνώσης του νέου νομίσματος. Ωστόσο η γνώση τους αυτή δεν ήταν τόσο αποτέλεσμα κατανόησης της δεκαδικής δομής του ευρώ, αλλά της μεταφοράς γνωστικών σχημάτων από το πεδίο των ακεραίων αριθμών. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αποδίδουν σε δραστηριότητες που η γνώση των ακεραίων υποστήριζε αυτή των δεκαδικών, αλλά όχι σε αυτές που ερχόταν σε σύγκρουση. Στην εργασία γίνεται συζήτηση για τις ψυχολογικές γνωστικές διεργασίες που λαμβάνουν χώρα, όταν το παιδί εκτίθεται σε ένα νέο εννοιολογικό πεδίο αριθμών, παρουσιάζονται οι δυσκολίες που ανακύπτουν και γίνονται παιδαγωγικές προτάσεις αξιοποίησης της εμπειρίας με το ευρώ για την εισαγωγή των παιδιών στο πεδίο των δεκαδικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η 1η Ιανουαρίου 2002 ήταν μέρα ιστορική για τη χώρα μας, αλλά και για 300 εκατομμύρια Ευρωπαίους πολίτες. Σε δώδεκα ευρωπαϊκές χώρες, συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας, τέθηκε σε κυκλοφορία, ένα νέο νόμισμα, το ευρώ. Η αλλαγή αυτή ήταν αναμενόμενο να επηρεάσει σημαντικά τις χρηματοοικονομικές και εμπορικές μας συναλλαγές. Μήπως, όμως, εκτός από την οικονομική ζωή, μπορού-

σε η νομισματική αυτή αλλαγή να επηρεάσει τη σκέψη και τη γνώση των ελληνο-παιδών για τους αριθμούς;

Το εύλογο του ερωτήματος έγκειται στην ιδιαιτερότητα του ευρώ έναντι της δραχμής. Η δραχμή ήταν ένα νόμισμα που, τουλάχιστον κατά τις τελευταίες δύο δεκαετίες, χρησιμοποιείτο πάντα σε ακέραιους αριθμούς. Οι υποδιαιρέσεις της είχαν από χρόνια καταργηθεί, και τα πενήνταράκια και οι τρύπιες δεκάρες είναι για τα σημερινά παιδιά και τους περισσότερους νεοέλληνες άγνωστα. Με την εισαγωγή, όμως, του ευρώ τα παιδιά κλήθηκαν να χρησιμοποιήσουν ένα νόμισμα με δεκαδικές υποδιαιρέσεις - το 1 ευρώ, υποδιαιρείται σε εκατοστά γνωστά ως λεπτά. Η αλλαγή αυτή είχε ως αποτέλεσμα οι τιμές των αγαθών να εκφράζονται πλέον σε δεκαδικούς αριθμούς, μεικτούς ή μη. Η επαφή με το νέο νόμισμα προσφέρει έναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εξετάσουμε την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών από τα μικρά παιδιά, στο πλαίσιο των οικονομικών συναλλαγών τους. Ως γνωστόν οι δεκαδικοί αριθμοί εισάγονται για πρώτη φορά στην Δ' τάξη. Με δεδομένη από τη μια τη δυσκολία των δεκαδικών αριθμών ακόμα και για τους ενήλικες (Grossman 1983, Holmes 1995, Moss and Case 1999, Hanson and Thomas 2000) και από την άλλη τον χρόνο διδασκαλίας τους στο σχολείο, θα ήταν λογικό να υποθέσουμε ότι οι ελληνόπαιδες της πρώτης τουλάχιστον σχολικής ηλικίας, αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση και τη χρήση του ευρώ.

Η δυσκολία μετάβασης στο νέο νόμισμα αυξάνεται περαιτέρω από το γεγονός ότι η ισοτιμία ευρώ-δραχμής δεν προσφέρεται για εύκολες μετατροπές. Η νομισματική ισοτιμία " $1\text{€} = 340,75 \text{ δραχμές}$ " απαιτεί συνθέτους και χρονοβόρους αριθμητικούς υπολογισμούς, ακόμα και για ένα ενήλικα. Για τα παιδιά, η μετατροπή από το ένα νόμισμα στο άλλο είναι ακόμα δυσκολότερη για το λόγο ότι: α) απαιτεί καλή και σε βάθος κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, ώστε να ξέρει το παιδί πότε να διαιρεί και πότε να πολλαπλασιάζει. Αυτό δεν είναι κάτι το αυτονόητο, γιατί τα παιδιά, όπως συχνά και οι ενήλικες, έχουν την λανθασμένη πεποίθηση ότι ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει (Fischbein et al. 1985). Κάτι τέτοιο μπορεί να ισχύει στις πράξεις μεταξύ ακεραίων αριθμών, όχι όμως όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται με δεκαδικό μικρότερο του 1 (π.χ. $6 \times 0,5 = 3$ και $6:0,5 = 12$). β) Το παιδί πρέπει να γνωρίζει τον αλγόριθμο των παραπάνω πράξεων. Να μπορεί, δηλαδή, να εκτελεί πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις μεταξύ δεκαδικών ή δεκαδικών και ακεραίων και να κατανοεί το αποτέλεσμα τους.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η προσαρμογή στο ευρώ στην Ελλάδα ίσως να ήταν δυσκολότερη, καθώς πολλές ευρωπαϊκές χώρες χρησιμοποιούσαν ήδη εθνικά νομίσματα με υποδιαιρέσεις (π.χ. το γερμανικό μάρκο υποδιαιρούνταν σε 100 φένιχ, το γαλλικό φράγκο σε 100 σεντίμ κ.α.) και η ισοτιμία ευρώ-εθνικού νομίσματος ήταν πιο απλή (π.χ. 2 μάρκα κάνουν περίπου 1 ευρώ).

Η διαπίστωση των παραπάνω δυσκολιών αποτέλεσε το κίνητρο διεξαγωγής της παρούσας έρευνας. Στόχος της μελέτης μας ήταν να εξετάσουμε τον τρόπο προσέγγισης των δεκαδικών αριθμών από τους μικρούς μαθητές μέσα από την εμπειρία

του νέου ευρωπαϊκού νομίσματος. Γνωρίζουμε ότι τα παιδιά εμπλέκονται από νωρίς σε χρηματικές συναλλαγές. Τα περισσότερα αγοράζουν διάφορα σνακ από το κυλικείο του σχολείου τους με το χαρτζιλίκι που παίρνουν από τους γονείς τους. Αυτή η καθημερινή εμπειρία παρέχει την ευκαιρία για ένα πλήθος μαθηματικών, συχνά σύνθετων συλλογισμών και υπολογισμών, όπως: «τι χρήματα έχω, τι μπορώ να αγοράσω με αυτά, πόσο κάνουν 2 ή περισσότερα πράγματα, τι ρέστα θα πάρω αν αγοράσω το χ' προϊόν, πόσα χρήματα μπορώ να συγκεντρώσω, αν κάνω οικονομία για ν' μέρες» κ.α.

Είναι σίγουρο ότι η μετάβαση από τη δραχμή στο ευρώ θα επηρέαζε σημαντικά τις χρηματικές συναλλαγές των παιδιών σε πολλά επίπεδα. Συγκεκριμένα: α) τα παιδιά πρέπει να διαβάσουν τις δεκαδικές τιμές των προϊόντων. Αυτή η ικανότητα είναι απαραίτητη προκειμένου να συγκρίνουν τιμές, αλλά και να εκτιμούν, αν έχουν αρκετά χρήματα να αγοράσουν το προϊόν που επιθυμούν. Η ικανότητα αυτή είναι αρκετά σύνθετη, γιατί το ακέραιο μέρος της τιμής αναφέρεται στα ευρώ και το δεκαδικό στα λεπτά. Στην ανάγνωση δε των λεπτών το παιδί πρέπει να εκτιμήσει και τη θέση αξίας (place value) του κάθε ψηφίου. Η πρώτη θέση αμέσως μετά την υποδιαστολή αναφέρεται στα δέκατα και η αμέσως επόμενη δεξιά στα εκατοστά του ευρώ. Οι τιμές για παράδειγμα 0,5 και 0,05 αν και στη γραφή είναι παρόμοιες, εκφράζουν διαφορετικές ποσότητες. β) Τα παιδιά πρέπει να μάθουν να χειρίζονται τα νέα κέρματα και χαρτονομίσματα στις συναλλαγές τους, έτσι ώστε, όταν σε κάποιο ταμείο κληθούν να πληρώσουν ένα ποσό, να δώσουν τα κατάλληλα κέρματα ή χαρτονομίσματα. γ) Η οικειοποίηση με το νόμισμα συνεπάγεται και την ικανότητα αδρότης εκτίμησης της αξίας προϊόντων, ιδίως αυτών που αγοράζουν συχνά. Μπορούν, για παράδειγμα, τα παιδιά να εκτιμήσουν που περίπου κυμαίνεται η τιμή μιας γκοφρέτας ή μιας τυρόπιτας; δ) Οι πράξεις που επιστρατεύουμε συχνότερα στις εμπορικές μας συναλλαγές είναι αυτές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Προσθέτουμε για να βρούμε το σύνολο της αξίας των αγορών μας, ενώ αφαιρούμε, για να βρούμε τι ρέστα θα πάρουμε. Αναμφίβολα, οι υπολογισμοί αυτοί ήταν ευκολότεροι με τις δραχμές, καθώς οι πράξεις αφορούσαν ακέραιους αριθμούς. Με τους δεκαδικούς παρουσιάζονται πρόσθετες δυσκολίες, καθώς το παιδί πρέπει να κατανοήσει ότι προσθαφαιρούμε δεκαδικούς της αυτής αξίας (δέκατα με/από δέκατα, εκατοστά με/από εκατοστά κ.ο.κ.), πράξεις αρκετά δύσκολες όταν προστίθενται ή αφαιρούνται αριθμοί με διαφορετικό αριθμό δεκαδικών ψηφίων (Wearne and Hiebert 1988).

Οι παραπάνω δεξιότητες είναι αρκετά σύνθετες - ακόμα και όταν οι συναλλαγές μας γίνονταν με τη δραχμή - γιατί απαιτούν τον συντονισμό πολλών μαθηματικών εννοιών. Η δυσκολία τους δε αυξάνεται περισσότερο με το ευρώ, καθώς τα παιδιά πρέπει να κάνουν μαθηματικούς συλλογισμούς με δεκαδικούς. Το ερώτημα που τίθεται είναι πώς αντιμετωπίσαν τα παιδιά τη νομισματική αυτή αλλαγή. Δύο υποθέσεις μπορούμε να διατυπώσουμε ως απάντηση στο ερώτημα αυτό. Με δεδομένη τη δυσκολία των δεκαδικών αριθμών και το χρόνο εισαγωγής τους στο σχολείο, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι τα παιδιά, που φοιτούν σε τάξεις μικρότερες της

Δ' Δημοτικού και δεν έχουν διδαχτεί τους δεκαδικούς αριθμούς, θα αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση του νέου νομίσματος και κατά συνέπεια στις καθημερινές χρηματικές τους συναλλαγές. Η δεύτερη υπόθεση είναι πιο θετική. Ενδέχεται τα παιδιά μέσω της καθημερινής τους τριβής με το ευρώ να αναπτύξουν κάποια γνώση των δεκαδικών αριθμών και να οικειοποιηθούν το νέο νόμισμα. Η θέση αυτή δεν στερείται θεωρητικής θεμελίωσης. Αν δεχτούμε την παραδοχή της κοινωνικοπολιτισμικής θεωρίας του Vygotsky, κάθε γνωστική λειτουργία προτού εσωτερικευθεί συναντάται στις κοινωνικές διαδράσεις ανάμεσα στα άτομα (Foulin and Mouchon 2002). Μεταφέροντας τη θέση αυτή στη μελέτη μας, θα λέγαμε ότι η καθημερινή συναλλαγή των παιδιών με το ευρώ μπορεί να οδηγήσει στο σχηματισμό γνωστικών δομών για τους δεκαδικούς αριθμούς.

Η πορεία ανάπτυξης που προτείνει η δεύτερη υπόθεση έχει επαληθευτεί επανειλημμένως στην ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών. Τα ευρήματα συστηματικών μελετών έχουν δείξει, για παράδειγμα, ότι τα παιδιά μπορούν να κάνουν αριθμητικούς υπολογισμούς και να λύνουν λεκτικά προβλήματα, προτού εισαχθούν στις αριθμητικές πράξεις στο σχολείο (Riley et al. 1983, Carpenter and Moser 1983, Hughes 1986, Carpenter et al. 1993, Κορνηλάκη 2003), ικανότητα που έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο της καθημερινής τους εμπειρίας με τους αριθμούς και αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία δομείται η οργανωμένη σχολική γνώση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Υποκείμενα

Στη μελέτη έλαβαν μέρος 61 παιδιά τα οποία κατανέμονται ως εξής: α) 20 παιδιά (10 κορίτσια και 10 αγόρια) της Β' τάξης Δημοτικού με μέσο όρο ηλικίας τα 7,5 έτη, β) 20 παιδιά (12 κορίτσια και 8 αγόρια) της Γ' τάξης Δημοτικού με μέση ηλικία τα 8,6 έτη και γ) 21 παιδιά της Δ' Δημοτικού με μέση ηλικία τα 10,5 έτη. Τα παιδιά αυτά επιλέχθηκαν με στρωματοποιημένη ανά τάξη (Β', Γ' και Δ') τυχαία δειγματοληψία, από 2 αστικά σχολεία του Ηρακλείου Κρήτης.

Σχεδιασμός και διαδικασία

Προκειμένου να εξετάσουμε τι γνώριζαν τα παιδιά για το ευρώ αμέσως μετά την εισαγωγή του και αν σημείωσαν κάποια πρόοδο στη γνώση τους αυτή μετά την πάροδο κάποιου εύλογου χρονικού διαστήματος, η ερευνητική διαδικασία χωρίστηκε σε δύο χρονικά φάσεις. Η πρώτη φάση της έρευνας διεξήχθη το πρώτο μισό του Ιανουαρίου 2002, αμέσως μετά την εισαγωγή του κοινού ευρωπαϊκού νομίσματος, ενώ η δεύτερη φάση μετά την πάροδο περίπου πέντε μηνών, τέλη Μαΐου με αρχές Ιουνίου 2002.

Τα παιδιά εξετάστηκαν στις ακόλουθες δοκιμασίες:

- α) *Γραφή τιμών.* Στη δραστηριότητα αυτή ζητήσαμε από τα παιδιά να γράψουν σε ταμπέλες προϊόντων τις τιμές τους. Η γραφή δεκαδικών αριθμών παρουσιάζει δυσκολίες καθώς το παιδί πρέπει να ξεχωρίσει με υποδιαστολή το ακέραιο μέρος της τιμής που αναφέρεται στα ευρώ, από το δεκαδικό που αναφέρεται στα

λεπτά. Επιπλέον, στα λεπτά πρέπει να προσεχθεί η θέση αξίας των ψηφίων. Τα παιδιά κλήθηκαν να γράψουν τις ακόλουθες τιμές: (0,07), (0,84), (0,90), (2,09) και (9,46). Ο ερευνητής έλεγε στα παιδιά ότι κάτι έκανε για παράδειγμα “7 λεπτά” ή “2 ευρώ και 9 λεπτά” και τα παιδιά έγραφαν την τιμή αυτή στην ταμπέλα του προϊόντος.

β) *Ανάγνωση τιμών.* Μια άλλη παράμετρος γνώσης του ευρώ που εξετάσαμε, ήταν αυτή της ικανότητας ανάγνωσης των δεκαδικών τιμών. Όταν αγοράζουμε κάποιο προϊόν, διαβάζουμε την ετικέτα του, προκειμένου να πληροφορηθούμε την τιμή του. Οι τιμές που αναγράφονταν σε δραχμές, δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερη δυσκολία καθώς ήταν ακέραιοι αριθμοί. Με την εισαγωγή, όμως, του ευρώ οι τιμές αναγράφονται σε δεκαδικούς, γεγονός που αυξάνει τη δυσκολία τους. Οι τιμές που ζητήθηκε από τα παιδιά να αναγνώσουν ανήκαν σε κατηγορίες ανάλογα με την ύπαρξη ή μη ακεραίου μέρους και τη θέση αξίας των δεκαδικών ψηφίων: α) 0,05 και 0,09 β) 0,23 και 0,90 γ) 0,6 και 0,3 και δ) 3,46 και 4,37. Οι τιμές αναγράφονταν πάνω σε κάρτες και αντιστοιχούσαν σε σκιτσαρισμένα αγαθά.

γ) *Εκτίμηση των τιμών διαφόρων προϊόντων.* Θεωρήσαμε ότι κάποιος έχει καλή αίσθηση για την αγοραστική αξία του νομίσματος που χρησιμοποιεί, όταν γνωρίζει ή μπορεί να προσδιορίσει την αγοραστική του αξία. Για το λόγο αυτό ζητήθηκε από τα παιδιά να προσδιορίσουν τις τιμές 7 προϊόντων που αγοράζουν συχνά από το κυλικείο του σχολείου τους (σάντουιτς, σοκολάτα, χυμό κ.ά.). Πιο συγκεκριμένα, για κάθε προϊόν δείξαμε στα παιδιά από μία κάρτα στην οποία αναγραφόταν 4 διαφορετικές τιμές. Τα παιδιά έπρεπε να επιλέξουν ποια από τις 4 αυτές τιμές ανταποκρινόταν στην τιμή του προϊόντος. Για παράδειγμα, στην κάρτα με το σάντουιτς οι προτεινόμενες τιμές ήταν 0,50, 1,50, 5,50 και 8,50. Τις τιμές αυτές τις διάβαζε ο ερευνητής (π.χ. 1 ευρώ και 50 λεπτά) για να αποκλείσει το ενδεχόμενο αποτυχίας των παιδιών λόγω δυσκολίας στην ανάγνωσή τους.

δ) *Πρόσθεση και αφαίρεση τιμών.* Στο πλαίσιο αυτής της δραστηριότητας εξετάσαμε, αν τα παιδιά μπορούν να προσθέτουν τις τιμές δύο προϊόντων, για να προσδιορίσουν τη συνολική τους αξία. Στην περίπτωση της αφαίρεσης τους ζητήθηκε να υπολογίσουν το υπόλοιπο που θα έμενε στο πορτοφόλι τους μετά την αγορά ενός προϊόντος. Η δραστηριότητα αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς το παιδί πρέπει: α) να ξεχωρίζει το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος, β) να γνωρίζει ότι προστίθενται ή αφαιρούνται μονάδες της αυτής αξίας, και γ) να ξέρει να κάνει ομαδοποίηση δεκαδικών στην επόμενη ακέραια μονάδα. Οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις που έπρεπε τα παιδιά να εκτελέσουν, ανήκαν στις ακόλουθες κατηγορίες ανάλογα με τους εμπλεκόμενους αριθμούς και το αποτέλεσμα των πράξεων:

α) πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων (12+5), (13-5),

β) πρόσθεση και αφαίρεση εκατοστών του ευρώ (0,05+0,03), (0,09-0,05),

γ) πρόσθεση και αφαίρεση δεκάτων και εκατοστών του ευρώ (0,23+0,11), (0,30-0,15)

δ) πρόσθεση χωρίς ομαδοποίηση δεκαδικών στην επόμενη ακέραια μονάδα ($4,30+3,25$), και αφαίρεση χωρίς δανεισμό ($4,25-2,10$).

ε) πρόσθεση με ομαδοποίηση δεκαδικών σε ακέραια μονάδα ($0,70+0,30$), ($2,70+1,40$), και αφαίρεση με δανεισμό ακέραιας μονάδας ($2,30-1,70$), ($3,20-1,90$).

Αναφορικά με τη διαδικασία, δείχναμε στα παιδιά μια κάρτα με 2 κάθε φορά διαφορετικά προϊόντα (παγωτό, τσίχλες, αρκουδάκι κ.ά.) τα οποία επρόκειτο να αγοράσει. Δίπλα σε κάθε προϊόν αναγραφόταν η τιμή του σε δεκαδική μορφή την οποία και διάβαζε ο ερευνητής (π.χ. «5 λεπτά» ή «2 ευρώ και 30 λεπτά»). Άλλωστε σκοπός αυτής της δραστηριότητας ήταν να ελέγξει την ικανότητα των παιδιών να προσθέτουν και να αφαιρούν δεκαδικούς αριθμούς και όχι να τους «διαβάζουν», γνώση η οποία εξετάστηκε σε προηγούμενη δραστηριότητα. Ο ερευνητής ζητούσε από το παιδί να υπολογίσει πόσο στοίχιζαν και τα 2 προϊόντα μαζί. Στην περίπτωση της αφαίρεσης, κάθε κάρτα απεικόνιζε ένα πορτοφόλι, πάνω στο οποίο αναγραφόταν το ποσό που περιείχε και δίπλα του η τιμή ενός προϊόντος, που το παιδί επρόκειτο να αγοράσει. Ζητούσαμε από τα παιδιά να μας πουν πόσα χρήματα θα έμειναν στο πορτοφόλι μετά την αγορά. Τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι.

ε) *Χρήση του νομίσματος*. Γνώση του νομίσματος σημαίνει και ικανότητα χρήσης του σε καθημερινές συναλλαγές. Για το λόγο αυτό, στη δραστηριότητα αυτή εξετάζεται, αν τα παιδιά μπορούν να χειριστούν το νόμισμα, για να πληρώσουν ένα ποσό. Συγκεκριμένα, δώσαμε στα παιδιά ένα πορτοφολάκι, που περιείχε κέρματα των 1, 2, 5, 10, 20 και 50 λεπτών και των 1 και 2 ευρώ. Τα παιδιά έπρεπε με τα χρήματα αυτά να αγοράσουν διάφορα αγαθά (τσίχλες, καραμέλες, μπαλόνια, κ.ά.) από ένα φανταστικό μαγαζάκι. Έτσι, κάθε φορά που διάλεγαν να αγοράσουν κάτι, ο ερευνητής τους έλεγε πόσο κοστίζει (π.χ. 13 λεπτά ή 1 ευρώ και 35 λεπτά) και εκείνα έπρεπε να δώσουν το ακριβές ποσό στον σκιτσαρισμένο ταμιά. Τα παιδιά μπορούσαν να αγοράσουν 8 προϊόντα των οποίων οι τιμές ήταν (0,08), (0,13), (0,24), (0,48), (0,76), (1,35), (2,75) και (4,14).

στ) *Μετατροπή δραχμών σε ευρώ και αντίστροφα*. Σκοπός αυτής της δοκιμασίας ήταν να εξετάσει κατά πόσο τα παιδιά μπορούσαν να μετατρέπουν τις δραχμές σε ευρώ και αντίστροφα. Η δοκιμασία αυτή παρουσίαζε ενδιαφέρον μόνο κατά την πρώτη φάση της έρευνας, που είχαμε παράλληλη κυκλοφορία των δύο νομισμάτων. Επειδή η δραστηριότητα αυτή απαιτεί καλή γνώση των πράξεων της διαίρεσης και του πολλαπλασιασμού με δεκαδικούς, δεξιότητα την οποία δεν αναμένετο να έχουν τα παιδιά της μελέτης μας, προσπαθήσαμε να τα διευκολύνουμε. Τους δώσαμε δύο πίνακες με τις αντιστοιχίες ανάμεσα στα δύο νομίσματα, ένα πίνακα με την αντιστοιχία δραχμής-ευρώ και ένα πίνακα με την αντιστοιχία ευρώ-δραχμής. Για παράδειγμα, στον πίνακα αναγραφόταν πόσες δραχμές κάνουν το 1, τα 10, τα 20, τα 50 λεπτά και το 1 ευρώ, και πόσα ευρώ κάνουν οι 10, οι 20, οι 50, οι 100 και οι 1000 δραχμές. Τα παιδιά είχαν ακόμα τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν χαρτί και μολύβι ή και κομπιουτεράκι, για να εκτελέσουν αριθμητικούς υπολογισμούς. Οι μετατροπές που τους δόθηκαν

ήταν οι ακόλουθες: α) από δραχμές σε ευρώ: 150, 260, 340, 500, 1200 και 3400 δραχ., β) από ευρώ σε δραχμές: 0,60, 0,75, 1, 2,70, 3 και 5,30 ευρώ. Φροντίσαμε οι μετατροπές να είναι κατά το δυνατό ανάλογης δυσκολίας, δηλαδή να απαιτείται ο ίδιος περίπου αριθμός βημάτων βάση του πίνακα για να πραγματοποιηθούν. Όσον αφορά στη διαδικασία δίνουμε στα παιδιά την τιμή ενός προϊόντος στο ένα νόμισμα και τους ζητούσαμε να βρουν την αντίστοιχη τιμή του στο άλλο νόμισμα. Παραδείγματος χάριν, λέγαμε ότι μια γκοφρέτα κάνει 150 δραχμές και τους ζητούσαμε να βρουν την τιμή της σε ευρώ ή λέγαμε ότι μία κούκλα κάνει 5 ευρώ και 30 λεπτά και ζητούσαμε να βρουν την τιμή της σε δραχμές.

Στις παραπάνω δραστηριότητες –ιδιαίτερα σε αυτές που αφορούσαν τις τιμές των προϊόντων και τη χρήση του νομίσματος– υπήρχε ο κίνδυνος να παιδιά να αποτύχουν, όχι λόγω ελλιπούς γνώσης και κατανόησης του ευρώ, αλλά λόγω ελλιπούς εμπειρίας στις χρηματικές συναλλαγές γενικότερα. Για το λόγο αυτό, τα παιδιά εξετάστηκαν σε παράλληλες δοκιμασίες, που αφορούσαν τη δραχμή, ως δραστηριότητες ελέγχου. Με ανάλογο τρόπο τούς ζητήθηκε να εκτιμήσουν σε δραχμές τιμές προϊόντων που αγοράζουν και να πληρώσουν σε δραχμές την αξία τους στο φανταστικό μαγαζάκι.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α) *Γραφή τιμών.* Στον Πίνακα 1 αναγράφονται τα ποσοστά των παιδιών που έγραψαν σωστά τις τιμές. Υψηλά είναι τα ποσοστά επιτυχίας από την πρώτη κιόλας φάση της έρευνας στην Γ' και Δ' τάξη. Αναλυτικότερα, ο αριθμός 9,46 ήταν ο ευκολότερος σε όλες τις τάξεις και στις δύο φάσεις της έρευνας. Δυσκολότεροι ήταν οι αριθμοί 0,07 και 2,09. Όπως φανερώνουν τα λάθη των παιδιών, η δυσκολία των αριθμών αυτών έγκειται στη θέση αξίας των δεκαδικών ψηφίων. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2 τα περισσότερα παιδιά έγραψαν τους αριθμούς αυτούς ως "0,7" και "2,9" αντίστοιχα. Τα λάθη αυτά έχουν σταθερότητα στο χρόνο και παρατηρούνταν ακόμα και στη Δ' τάξη στη δεύτερη φάση της έρευνας. Λίγα λάθη παρατηρήθηκαν και στη γραφή του αριθμού "0,84" όπου μερικά παιδιά τον έγραψαν ως "0,084" ή "8,4. Αν και δεν μπορούμε να γνωρίζουμε απόλυτα που οφείλονται τα λάθη αυτά, αντανακλούν, όμως, από τη μια την προσπάθεια του παιδιού να μεταφέρει στο χαρτί μια εικόνα που έχει για τους δεκαδικούς αριθμούς, ότι δηλαδή υπάρχει κάπου ένα κόμμα ίσως και κάποιο ή κάποια μηδενικά, και από την άλλη την ελλιπή γνώση της θέσης αξίας των ψηφίων. Συχνά τα μικρά κυρίως παιδιά απέδιδαν με λέξεις και όχι με βάση τη δεκαδική σημειογραφία τη θέση αξίας των αριθμών. Έτσι, για παράδειγμα, έγραφαν "7 λεπτά", "7λ." ή "9 ευρώ και 46 λεπτά" (Σχήμα 1). Σπανιότερα τα παιδιά έγραφαν τους δεκαδικούς αριθμούς ως ακέραιους, π.χ. "90" αντί για "0,90". Το λάθος αυτό παρατηρήθηκε μόνο στις περιπτώσεις των αριθμών "0,07" και "0,90" που οι τιμές αναφέρονταν μόνο σε λεπτά. Στις περιπτώσεις των τιμών με ακέραιο και δεκαδικό μέρος κάποια παιδιά εφηύραν ένα μεικτό τρόπο αναπαράστασής τους με λέξεις και δεκαδικά σύμβολα. Για παράδειγμα, έγραψαν "9 ευρώ, 46 λεπτά" ή "9 ε, 56 λ." (Σχήμα 2).

Αυτός ο τρόπος γραφής διαφοροποιείται από την αναπαράσταση με λέξεις, καθώς τα παιδιά χρησιμοποιούν τη δεκαδική υποδιαστολή για να χωρίσουν το ακέραιο από το δεκαδικό μέρος. Η επίδοση των παιδιών βελτιώθηκε σταθερά από την πρώτη στη δεύτερη φάση της έρευνας.

Πίνακας 1. Ποσοστά σωστών απαντήσεων στη δραστηριότητα της γραφής ανά τάξη και ερευνητική φάση

	Β' τάξη		Γ' τάξη		Δ' τάξη	
	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση
0,07	-	35	15	50	62	71
0,84	35	60	85	85	95	100
0,90	30	65	90	90	95	100
2,09	-	5	25	45	67	81
9,46	45	70	95	95	95	100

Πίνακας 2. Ποσοστά των τύπων των λαθών στη δραστηριότητα της γραφής ανά τάξη και ερευνητική φάση

	Είδος λάθους	Β' τάξη		Γ' τάξη		Δ' τάξη	
		Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση
0,07	λεκτικός συμβολισμός	45	20	5	5	5	-
	θέση αξίας ("0,7")	40	40	80	45	33	29
	ως ακέραιο ("7")	15	5	-	-	-	-
0,84	λεκτικός συμβολισμός	45	20	5	10	5	-
	ως ακέραιο	20	5	-	5	-	-
	θέση αξίας (0,084/8,4)	-	15	10	-	-	-
0,90	λεκτικός συμβολισμός	55	20	5	10	5	-
	ως ακέραιο ("90")	10	15	-	-	-	-
	θέση αξίας ("9,0")	5	-	5	-	-	-
2,09	λεκτικός συμβολισμός	35	5	5	5	-	-
	θέση αξίας ("2,9")	50	65	70	50	29	19
	μεικτή αναπαράσταση	15	25	-	-	5	-
9,46	λεκτικός συμβολισμός	35	5	5	5	-	-
	μεικτή αναπαράσταση	20	25	-	-	5	-

7 λ
84 λεπτά
84 λεπτά
2 € 9 λεπτά
9 € 46 λ

Σχήμα 1. Δείγμα λεκτικού συμβολισμού των αριθμών

2 €, 9 λεπτά
9 €, 46 λεπτά

Σχήμα 2. Δείγμα μεικτής αναπαράστασης των αριθμών

β) **Ανάγνωση τιμών.** Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις των παιδιών στη δοκιμασία αυτή καθώς οι απαντήσεις τους επηρεάστηκαν από την ύπαρξη ακέραιου μέρους στις τιμές και από τη θέση αξίας των δεκαδικών ψηφίων (Πίνακας 3). Στις περιπτώσεις εκείνες που δεν υπήρχε ακέραιο μέρος, πολλά παιδιά διάβασαν τα λεπτά για ευρώ, π.χ. διάβασαν το “0,05” ως “5 ευρώ”. Άλλα παιδιά προβληματισμένα προφανώς από την ύπαρξη μηδενικού αμέσως μετά την υποδιαστολή και προκειμένου να αξιοποιήσουν την ύπαρξή του, διάβασαν τον αριθμό από αριστερά προς δεξιά, δηλαδή διάβασαν το “0,05” ως “50” λεπτά. Αυτά τα προβλήματα εξαλείφθηκαν στην Δ’ τάξη. Το πρόβλημα, όμως, που παραμένει σε βάθος χρόνου εντοπίζεται στις περιπτώσεις εκείνες που δεν αναγράφεται το μηδέν στη θέση των εκατοστών, όπως στους αριθμούς “0,3” και “0,6”, τους οποίους τα παιδιά, ακόμα και της Δ’ τάξης, διάβασαν ως “3 λεπτά” και “6 λεπτά” αντίστοιχα. Η πλέον εύκολη ήταν η ανάγνωση των τιμών με ακέραιο και διψήφιο δεκαδικό μέρος (3,46 και 4,37) με πολύ υψηλό ποσοστό επιτυχίας ακόμα και στη Β’ τάξη. Κανένα παιδί από αυτά που διάβασαν σωστά τις τιμές των προϊόντων δεν διάβασε συστηματικά τους δεκαδικούς αριθμούς ως “0 κόμμα 23” ή “3 κόμμα 46”. Μόνο 4 παιδιά από τη Β’ τάξη και 2 από τη Γ’ διάβασαν, αντίστοιχα, συνολικά 7 και 4 τιμές με αυτόν τον τρόπο. Οι απαντήσεις τους αυτές καταχωρήθηκαν ως σωστές. Η χαμηλή συχνότητα αυτού του τρόπου ανάγνωσης πιστεύουμε ότι οφείλεται στο πλαίσιο αναφοράς της δρα-

στηριότητας, όπου οι δεκαδικοί αριθμοί αναφέρονταν σε τιμές προϊόντων, τις οποίες τα παιδιά έχουν συνδέσει με το νόμισμα του ευρώ.

Πίνακας 3. Ποσοστά απαντήσεων ανά τάξη και δοκιμασία στη δραστηριότητα ανάγνωσης τιμών

	Είδος απάντησης	Α' τάξη	Β' τάξη	Γ' τάξη
(0,05), (0,09)	σωστή	40	80	100
	δεν ξέρω	10		
	τα λεπτά για ευρώ	20	5	
	αντίστροφη ανάγνωση	30	15	
(0,23), (0,90)	σωστή	75	80	100
	δεν ξέρω	5		
	τα λεπτά για ευρώ	20	20	
(0,3) (0,6)	σωστή	5	5	5
	δεν ξέρω	10		
	λάθος θέσης αξίας	85	95	95
(3,46), (4,37)	σωστή	85	100	100
	δεν ξέρω	15		

Πίνακας 4. Μέσοι όροι επίδοσης στην εκτίμηση των τιμών των προϊόντων ανά νόμισμα, τάξη και ερευνητική φάση

	Τιμές σε δραχμές	Τιμές σε ευρώ	
	Α' φάση	Α' φάση	Β' φάση
Β' τάξη	3,90	2,55	5,35
Γ' τάξη	5	3,90	6,30
Δ' τάξη	5,90	5,43	6,71

Σημείωση. Μέγιστη τιμή 7

γ) *Εκτίμηση των τιμών διαφόρων προϊόντων.* Κάθε φορά που το παιδί επέλεγε το ποσό που αντιστοιχούσε στην πραγματική τιμή του προϊόντος έπαιρνε από ένα βαθμό. Το ανώτατο σύνολο βαθμών που μπορούσε να συγκεντρώσει για αυτή την δοκιμασία ήταν 7, όσα και τα υπό ερώτηση προϊόντα. Στον Πίνακα 4 φαίνονται οι μέσοι όροι επίδοσης ανά τάξη τόσο στην πρώτη όσο και τη δεύτερη φάση της έρευνας. Παρατηρούμε ότι κατά το χρονικό διάστημα αμέσως μετά την εισαγωγή του ευρώ, τα παιδιά είχαν αρκετά καλή αίσθηση των τιμών σε ευρώ ιδιαίτερα στις μεγαλύτερες τάξεις. Ωστόσο, κατά το χρονικό αυτό διάστημα εκτιμούσαν σωστότερα τις τιμές των προϊόντων σε δραχμές. Η διαφορά επίδοσης ήταν στατιστικά σημαντική σε όλες τις ηλικιακές ομάδες (για την Β' τάξη: $p=0,008$, για τη Γ' τάξη: $p=0,01$ και για τη Δ' τάξη: $p=0,05$). Η ικανότητα εκτίμησης των

Πίνακας 5. Ποσοστά των απαντήσεων που έδωσαν τα παιδιά στη δοκιμασία της πρόσθεσης

Είδος απάντησης	Β' τάξη		Γ' τάξη		Δ' τάξη	
	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση
12+5 σωστή	100	100	100	100	100	100
σωστή	85	90	90	95	100	100
0,05+0,03 άθροισμα σε ευρώ	15	10	10	5	-	-
σωστή	80	90	90	100	100	100
0,23+0,11 άθροισμα σε ευρώ	20	10	10	-	-	-
σωστή	20	30	40	70	95	95
0,70+0,30 άθροισμα σε ευρώ	40	20	15	-	-	5
χωρίς ομαδοποίηση	30	50	45	30	5	-
δεν ξέρω	10	-	-	-	-	-
σωστή	10	30	35	70	91	100
2,70+1,40 δεν ξέρω κ.ά.	70	25	35	5	-	-
χωρίς ομαδοποίηση	20	40	30	25	5	-
4,30+3,25 σωστή	30	75	80	100	95	100
δεν ξέρω κ.ά.	70	25	20	-	5	-

τιμών σε ευρώ βελτιώθηκε σημαντικά στην β' φάση της έρευνας. Έτσι, στη δεύτερη φάση οι μέσοι όροι επίδοσης ήταν υψηλοί και σημαντικά καλύτεροι σε όλες τις ηλικίες ($p < 0,0001$) από αυτούς του Ιανουαρίου.

- δ) *Πρόσθεση και αφαίρεση τιμών.* Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5 όλα τα παιδιά μπορούσαν άνετα να προσθέσουν και να αφαιρέσουν τις αξίες προϊόντων που ήταν σε ακέραιες τιμές, π.χ. $12+5=17$, τονίζοντας ότι το άθροισμα ήταν ευρώ. Όπως αναμενόταν, υψηλή ήταν και η απόδοσή τους όταν αφαιρούσαν ή πρόσθεταν μόνο λεπτά, π.χ. $(0,05+0,03)$, $(0,23+0,11)$ αφού ο ερευνητής αναφέρονταν στους αριθμούς αυτούς σαν να ήταν φυσικοί (π.χ. «5 λεπτά»). Λίγα ήταν τα παιδιά που απάντησαν ότι το άθροισμα των παραπάνω προσθέσεων εκφράζει ευρώ αντί για λεπτά, π.χ. « $0,05+0,03=8\text{€}$ ». Δυσκολότερες ήταν οι πράξεις εκείνες που απαιτούσαν την ομαδοποίηση σε 1 ευρώ των λεπτών, όταν αυτά υπερέβαιναν τα 100. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα. $(2,70+1,40)$ κάποια παιδιά στις μικρές κυρίως τάξεις δεν έκαναν ομαδοποίηση στην επόμενη ακέραια μονάδα και απάντησαν ότι το άθροισμα είναι 3 ευρώ και 110 λεπτά. Αρκετά παιδιά κυρίως από την Β' και Γ' τάξη έδωσαν απαντήσεις του τύπου «δεν ξέρω» ή έκαναν υπολογισμούς μη ταξινομήσιμους. Από αυτά τα παιδιά ένα ποσοστό της τάξης του 25% από τη Β' τάξη και του 10% από τη Γ' δεν έδειξε να κατανοεί ότι στην πρόσθεση των τι-

Πίνακας 6. Ποσοστά των απαντήσεων που έδωσαν τα παιδιά στη δοκιμασία της αφαίρεσης

Είδος απάντησης	Β' τάξη		Γ' τάξη		Δ' τάξη	
	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση
13-5	σωστή	80	95	100	100	100
	δεν ξέρω	20	5	-	-	-
0,09-0,05	σωστή	50	80	90	100	100
	υπόλοιπο σε ευρώ	25	10	-	-	-
	δεν ξέρω	25	10	10	-	-
0,30-0,15	σωστή	55	75	70	90	95
	υπόλοιπο σε ευρώ	20	5	-	-	-
	δεν ξέρω	25	20	30	10	5
2,30-1,70	σωστή	5	5	25	70	86
	0,70-0,30	25	15	10	10	-
	δεν ξέρω	60	70	65	20	14
3,20-1,90	σωστή	-	5	20	60	80
	0,90-0,20	35	20	30	15	5
	δεν ξέρω κ.ά.	65	75	50	25	15
4,25-2,10	σωστή	40	70	75	90	100
	δεν ξέρω κ.ά.	60	30	25	100	-

μὴν τὸ ἀκέραιο μέρος προστίθεται με τὸ ἀκέραιο καὶ τὸ δεκαδικὸ με τὸ δεκαδικό. Ἔτσι, γιὰ παράδειγμα, στὸ πρόβλημα $(2,70+1,40)$ ἔκαναν τοὺς ἐξῆς υπολογισμούς: $2+1=3$, $3+70=73$, $73+1=74$, $74+4=78$ λεπτά ἢ ευρώ γιὰ ἄλλα παιδιά. Ἀκόμα, ὅμως, καὶ σὲ αὐτὴ τὴν κατηγορία προβλημάτων τὰ παιδιά βελτίωσαν τὴν ἐπίδοσή τους με τὸ χρόνο, με ἀποτέλεσμα ἡ πλειονότητά τους νὰ μπορεῖ νὰ τὰ ἐπιλύσει στὴ Γ' τάξη. Ἐνκολότερες ἦταν οἱ προσθέσεις τιμῶν ποὺ δὲν ἀπαιτοῦσαν ομαδοποιήσεις. Περίπου τὸ ἓνα τρίτο τῶν παιδιῶν τῆς Β' τάξης μπόρεσε νὰ τὰ ἐπιλύσει ἀπὸ τὴν πρώτη κιόλας φάση τῆς μελέτης, προσθέτοντας τὰ ευρώ με τὰ ευρώ καὶ τὰ λεπτά με τὰ λεπτά. Σὲ ὅλες τὶς δοκιμασίες ἡ ἐπίδοση τῶν παιδιῶν βελτιώθηκε ἀπὸ τὴν πρώτη στὴ δεύτερη φάση τῆς ἐρευνας. Παρόμοια ἦταν ἡ ἀντιμετώπιση τῶν προβλημάτων ἀφαίρεσης (Πίνακας 6). Καὶ στὴν ἀφαίρεση δυσκολότερα ἦταν τὰ προβλήματα ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα ἀπαιτεῖτο δανεισμὸς μονάδας Συχνό λάθος τῶν μικρότερων παιδιῶν ἦταν ἀφαιροῦν τὰ λιγότερα λεπτά ἀπὸ τὰ περισσότερα. Γιὰ παράδειγμα, στὴν περίπτωση τῆς πράξης “2,30–1,70”, τὰ παιδιά εἶπαν “2€–1€=1€ καὶ 70λ–30λ=40λ, ἀρα ὑπόλοιπο 1,40”!

Πίνακας 6. Ποσοστά των απαντήσεων που έδωσαν τα παιδιά στη δοκιμασία της αφαίρεσης

Είδος απάντησης	Β' τάξη		Γ' τάξη		Δ' τάξη	
	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση	Α' φάση	Β' φάση
13-5	σωστή	80	95	100	100	100
	δεν ξέρω	20	5	-	-	-
0,09-0,05	σωστή	50	80	90	100	100
	υπόλοιπο σε ευρώ	25	10	-	-	-
0,30-0,15	δεν ξέρω	25	10	10	-	-
	σωστή	55	75	70	90	95
2,30-1,70	υπόλοιπο σε ευρώ	20	5	-	-	-
	δεν ξέρω	25	20	30	10	5
3,20-1,90	σωστή	5	5	25	70	86
	0,70-0,30	25	15	10	10	-
4,25-2,10	δεν ξέρω	60	70	65	20	14
	σωστή	-	5	20	60	80
4,25-2,10	0,90-0,20	35	20	30	15	5
	δεν ξέρω κ.ά.	65	75	50	25	15
4,25-2,10	σωστή	40	70	75	90	100
	δεν ξέρω κ.ά.	60	30	25	100	-

μόν το ακέραιο μέρος προστίθεται με το ακέραιο και το δεκαδικό με το δεκαδικό. Έτσι, για παράδειγμα, στο πρόβλημα $(2,70+1,40)$ έκαναν τους εξής υπολογισμούς: $2+1=3$, $3+70=73$, $73+1=74$, $74+4=78$ λεπτά ή ευρώ για άλλα παιδιά. Ακόμα, όμως, και σε αυτή την κατηγορία προβλημάτων τα παιδιά βελτίωσαν την επίδοσή τους με το χρόνο, με αποτέλεσμα η πλειονότητά τους να μπορεί να τα επιλύσει στη Γ' τάξη. Ευκολότερες ήταν οι προσθέσεις τιμών που δεν απαιτούσαν ομαδοποιήσεις. Περίπου το ένα τρίτο των παιδιών της Β' τάξης μπόρεσε να τα επιλύσει από την πρώτη κιόλας φάση της μελέτης, προσθέτοντας τα ευρώ με τα ευρώ και τα λεπτά με τα λεπτά. Σε όλες τις δοκιμασίες η επίδοση των παιδιών βελτιώθηκε από την πρώτη στη δεύτερη φάση της έρευνας. Παρόμοια ήταν η αντιμετώπιση των προβλημάτων αφαίρεσης (Πίνακας 6). Και στην αφαίρεση δυσκολότερα ήταν τα προβλήματα εκείνα στα οποία απαιτείτο δανεισμός μονάδας. Συχνό λάθος των μικρότερων παιδιών ήταν αφαιρούν τα λιγότερα λεπτά από τα περισσότερα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της πράξης " $2,30-1,70$ ", τα παιδιά είπαν " $2€-1€=1€$ και $70λ-30λ=40λ$, άρα υπόλοιπο 1,40"!

ε) *Χρήση νομίσματος*. Κάθε φορά που τα παιδιά πλήρωναν στο ταμείο του φανταστικού μαγαζιού το σωστό ποσό για τα προϊόντα που αγόραζαν έπαιρναν από ένα βαθμό. Στον Πίνακα 7 φαίνονται οι μέσοι όροι επίδοσης των παιδιών. Παρατηρούμε τα υψηλά ποσοστά επίδοσης των παιδιών στη χρήση του ευρώ σε όλες τις τάξεις και ιδιαίτερα στην Γ' και την Δ' Δημοτικού από την πρώτη κιόλας φάση της έρευνας, επίδοση που δεν υστερεί έναντι της δραχμής. Μόνο στη Β' τάξη και κατά την πρώτη φάση τα παιδιά μπορούσαν να χειριστούν καλύτερα τις δραχμές από τα ευρώ, αν και η διαφορά δεν κρίνεται στατιστικά σημαντική ($p=0,102$). Σημαντική ήταν η βελτίωση της επίδοσης των παιδιών αυτών από την πρώτη στη δεύτερη φάση της έρευνας ($p=0,02$) η οποία αγγίζει άριστα επίπεδα.

Πίνακας 7. Μέσοι όροι επίδοσης στη χρήση νομίσματος ανά τάξη, νόμισμα και ερευνητική φάση

	A' φάση	B' φάση	
	δραχμές	ευρώ	ευρώ
B' τάξη	5,45	4,35	7,55
Γ' τάξη	6,89	7,15	7,20
Δ' τάξη	5,90	5,43	6,71

Σημείωση. Μέγιστη τιμή 8.

στ) *Μετατροπή δραχμών σε ευρώ και αντίστροφα*. Για κάθε σωστή μετατροπή τα παιδιά έπαιρναν 1 βαθμό. Το ανώτερο σύνολο βαθμών που μπορούσαν να συγκεντρώσουν ήταν 6. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 8 η δοκιμασία αυτή απεδείχθη δύσκολη και σχεδόν αδύνατη για τα παιδιά της Β' τάξης. Διαπιστώνουμε ότι η μετατροπή των ευρώ σε δραχμές ήταν ευκολότερη από την αντίστροφη των δραχμών σε ευρώ στη Β' και τη Γ' τάξη ($p=0,01$ και $p=0,007$ αντίστοιχα). Ευκολότερη ήταν η μετατροπή των 340 δραχμών σε 1 ευρώ και αντίστροφα, που τα περισσότερα παιδιά, αν και υπήρχε στον πίνακα των αντιστοιχιών, γνώριζαν από στήθους. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσίαζε ο τρόπος που τα παιδιά έκαναν την μετατροπή από το ένα νόμισμα στο άλλο. Κανένα παιδί δεν πολλαπλασίασε το ποσό των ευρώ με το 340,75 για να βρει στην αντιστοιχία του σε δραχμές, όπως επίσης κανένα δεν διαίρεσε το ποσό των δραχμών με το 340,75 για να το μετατρέψει σε ευρώ, πράξεις εύκολα πραγματοποιήσιμες με το κομπιουτεράκι. Τα παιδιά δούλεψαν κυρίως με τη βοήθεια του πίνακα. Για παράδειγμα, προκειμένου να βρουν πόσα ευρώ είναι οι 260 δραχμές, επιμέρισαν το ποσό σε 100, 100, 50 και 10 δραχμές, βρήκαν από τον πίνακα ότι αντιστοιχούσε σε 30, 30, 15 και 3 λεπτά αντίστοιχα, τα πρόσθεσαν και βρήκαν ότι ισούνται με 78 λεπτά. Αν και η πρόθεσή μας ήταν να διευκολύνουμε τα παιδιά στους υπολογισμούς τους δίνοντας τον πίνακα με τις αντιστοιχίες, εκ του αποτελέσματος προκύπτει ότι δεν μπόρεσαν να αξιοποιήσουν τις πληροφορίες που τους παρεί-

χε. Η δυσκολία αυτή ενδεχομένως να οφείλεται στο ότι δεν δόθηκε αρχικά στα παιδιά κάποιο παράδειγμα και στο γεγονός ότι η κατανόηση και χρήση πινάκων από παιδιά αυτής της ηλικίας δεν είναι μία απλή διαδικασία.

Πίνακας 8. Μέσοι όροι επίδοσης στη δοκιμασία μετατροπής νομισμάτων

	δραχμές σε ευρώ	ευρώ σε δραχμές
Β' τάξη	0,1	0,4
Γ' τάξη	3,35	4,45
Δ' τάξη	5,09	5,24

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της μελέτης αυτής ήταν να μελετήσει τον τρόπο προσέγγισης των δεκαδικών αριθμών μέσα στο πλαίσιο της καθημερινής τους εμπειρίας με το ευρώ, καθώς και να εξετάσει τον βαθμό γνώσης και εξοικείωσης των παιδιών των πρώτων τάξεων του Δημοτικού σχολείου με το νέο νόμισμα. Οι επιδόσεις των παιδιών ήταν αποκαλυπτικές των δυνατοτήτων αλλά και των ελλείψεών τους.

Αναλυτικότερα, αρχίζοντας από τις δραστηριότητες εκτίμησης των τιμών και χρήσης του νομίσματος, συμπεραίνουμε ότι τα παιδιά είχαν καλή και συνεχώς βελτιούμενη αίσθηση της αγοραστικής δύναμης του νέου νομίσματος, τουλάχιστον για τα προϊόντα που παρουσιάζουν αγοραστικό ενδιαφέρον στην ηλικία τους, ενώ σημείωσαν ιδιαίτερα καλές επιδόσεις και στο χειρισμό των νέων κερμάτων για την εκτέλεση πληρωμών.

Όσον αφορά στις δοκιμασίες γραφής και ανάγνωσης, πιο εύκολες ήταν οι τιμές με ακέραιο και διψήφιο δεκαδικό μέρος, όπως π.χ. "9,46". Ήταν εκπληξη το εύρημα ότι το 85% των παιδιών της Β' τάξης κατάφερε να διαβάσει τιμές όπως "4,37" από την πρώτη κιόλας φάση της έρευνας. Ωστόσο, τα λάθη των παιδιών στις δοκιμασίες αυτές είναι αποκαλυπτικά. Η παρουσία του ψηφίου μηδέν είτε στο ακέραιο είτε στο δεκαδικό μέρος των αριθμών σχετίζεται με αρκετά είδη λαθών. Η κατάληψη της θέσης των δεκάτων από το μηδέν όπως π.χ. "0,05", αλλά και η απουσία του από τη θέση των εκατοστών, όπως π.χ. "0,3", αύξησαν τον δείκτη δυσκολίας των δοκιμασιών. Χαρακτηριστικό είναι ότι στην πρώτη περίπτωση κάποια παιδιά διάβασαν τον αριθμό από δεξιά προς αριστερά ως "50 λεπτά" και στη δεύτερη ως "3 λεπτά". Αλλά και στη γραφή δεκαδικών με εκατοστά μόνο, όπου το μηδέν καταλάμβανε τη θέση αξίας των δεκάτων, όπως π.χ. "2,09" η συντριπτική πλειοψηφία παρέλειψε το μηδέν, γράφοντας τα εκατοστά στη θέση των δεκάτων. Εκτιμώντας την επίδοση των παιδιών στις δραστηριότητες αυτές συμπεραίνουμε ότι: α) τα περισσότερα παιδιά έχουν επισημάνει την παρουσία της υποδιαστολής και την χρησιμοποιούν, αν και πρόκειται για σύμβολο που δεν έχουν διδαχθεί στο σχολείο, β) γνωρίζουν ότι η θέση των ευρώ είναι αριστερά της υποδιαστολής και των λεπτών δεξιά της, αλλά γ) δεν έχουν επί της ουσίας γνώση της αξίας των δεκαδικών και της θέσης αξίας των ψηφίων, όπως θα συζητήσουμε παρακάτω. Η δυσκολία αυτή,

αν και αμβλύνεται με την ηλικία, ωστόσο παραμένει σε ένα βαθμό και στην Δ' τάξη.

Οι δοκιμασίες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ανέδειξαν κάποιες άλλες αδυναμίες και δυνατότητες των παιδιών με τους δεκαδικούς. Όσο τα παιδιά προσέθεταν όμοιες μονάδες, δηλαδή ευρώ με ευρώ ($12+5$) ή λεπτά με λεπτά ($0,23+0,11$) δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερο πρόβλημα. Η υψηλή επίδοση στις δραστηριότητες αυτές οφείλεται κυρίως στον τρόπο διεξαγωγής της δραστηριότητας, κατά την οποία τα παιδιά δεν χρειάστηκε να “διαβάσουν” μόνα τους τους αριθμούς, αλλά ο ερευνητής αναφερόταν σε αυτούς σαν να ήταν “φυσικοί” (π.χ. “23 λεπτά”). Από την Γ' τάξη ιδιαίτερα υψηλά ήταν τα ποσοστά επιτυχίας και τις ασκήσεις δεκαδικών με ακέραιο μέρος, ιδίως όταν δεν χρειαζόταν ομαδοποίηση των λεπτών σε ακέραιο. Ενδιαφέρον προκαλεί και η στρατηγική επίλυσης που ακολούθησαν. Κανένα παιδί δεν εκτέλεσε τις πράξεις με χαρτί και μολύβι, αλλά με νοερούς συλλογισμούς πρόσθεσαν πρώτα τα ευρώ με τα ευρώ και στη συνέχεια τα λεπτά με τα λεπτά. Η μέθοδος επίλυσης φανερώνει ότι τα παιδιά μεταφέρουν τη γνώση τους από τους ακέραιους, όπου αφαιρούνται και προστίθενται όμοιες μεταξύ τους μονάδες. Το γεγονός ότι πολλά παιδιά δεν ομαδοποίησαν τα 100 λεπτά σε 1 ευρώ, δημιουργεί κάποιο προβληματισμό. Ενδεχομένως, τα παιδιά να μη γνώριζαν ότι $1\text{€} = 100$ λεπτά ή ακόμα περισσότερο να μην γνώριζαν τη σχέση της μονάδας με τις δεκαδικές της υποδιαιρέσεις, ότι δηλαδή $1 = 10$ δέκατα $= 100$ εκατοστά. Όπως θα επιχειρηματολογήσουμε στη συνέχεια, οι δυσκολίες των παιδιών φανερώνουν ότι αντιμετώπισαν τον δεκαδικό αριθμό σαν δυο διαφορετικούς και ανεξάρτητους μεταξύ τους αριθμούς που τους διαχωρίζει μία υποδιαστολή.

Η επίδοση των παιδιών στις δραστηριότητες που εξετάστηκαν ξεπέρασε τις αρχικές μας προσδοκίες, ιδιαίτερα αν αναλογιστούμε το μικρό χρονικό διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ της εισαγωγής του ευρώ και της έρευνάς μας, το επίπεδο δυσκολίας των δεκαδικών αριθμών καθώς και ότι τα παιδιά δεν τους είχαν διδαχτεί στο σχολείο. Ωστόσο, θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στη εξαγωγή συμπερασμάτων. Τα σχετικά υψηλά επίπεδα επιδόσεων των παιδιών στις περισσότερες από τις δραστηριότητες δε σημαίνουν αναγκαστικά καλή γνώση και χειρισμό των δεκαδικών αριθμών. Αυτό που με ασφάλεια μπορούμε να συμπεράνουμε από τα αποτελέσματά μας είναι ότι τα παιδιά, όταν έρχονται αντιμέτωπα με ένα νέο πεδίο αριθμών, στην περίπτωση μας τους δεκαδικούς, προσπαθούν να τους κατανοήσουν, μέσα από τη γνώση που έχουν ήδη αποκτήσει από την εμπειρία τους με τους ακέραιους αριθμούς τόσο στην τάξη όσο και στην καθημερινή ζωή. Η προϋπάρχουσα αυτή γνώση λειτουργεί ως ένα εργαλείο προσέγγισης του νέου πεδίου γνώσης και φανερώνει ότι τα μικρά παιδιά έξυπνα προσπαθούν να αποδώσουν νόημα στο καινούριο αξιοποιώντας γνώσεις που ήδη κατέχουν. Ωστόσο, η προϋπάρχουσα αυτή γνώση μπορεί να υποστηρίξει, αλλά και να παρεμποδίσει την ορθή κατανόηση των δεκαδικών αριθμών (Sackur-Grisvard and Leonard 1985, Wearne and Hiebert 1988, Resnick et al. 1989, Martinie and Bay-Williams 2003) Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά πώς τα παιδιά μεταφέρουν γνώση από την περιοχή των ακεραίων σε αυτή των δεκαδικών.

Αρχικά, πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι τα παιδιά μέσα από τη μικρή εμπειρία που είχαν με το ευρώ και συνακόλουθα με τους δεκαδικούς, είχαν εντοπίσει την παρουσία της υποδιαστολής. Τα παιδιά χρησιμοποίησαν την υποδιαστολή ως ένα σημείο στον αριθμό, που διαχώριζε τα ευρώ στα αριστερά της, από τα λεπτά στα δεξιά της. Ο εντοπισμός της υποδιαστολής θεωρείται από τους Sackur-Grisvard και Leonard (1985) ένα πρώτο βήμα. Όπως αναφέρουν, αρχικά τα παιδιά υπολογίζουν την παρουσία της υποδιαστολής, αλλά διαβάζουν το δεκαδικό μέρος όπως και το ακέραιο. Από τις δραστηριότητες γραφής, ανάγνωσης, πρόσθεσης και αφαίρεσης τιμών μπορούμε να πούμε ότι τα παιδιά είχαν κάνει το πρώτο αυτό βήμα. Όταν π.χ. τους ζητήθηκε να διαβάσουν μια δεκαδική τιμή, διάβασαν την τιμή σαν δύο ξεχωριστούς ακέραιους αριθμούς, με τη διαφορά ότι ο αριθμός αριστερά της υποδιαστολής αναφερόταν στα ευρώ και δεξιά στα λεπτά (π.χ. 3 ευρώ και 46 λεπτά). Ως αυτού του σημείου η μεταφορά γνώσης από τους ακέραιους στους δεκαδικούς βοηθάει τα παιδιά να προσεγγίσουν ή τουλάχιστον να διαβάσουν και να γράψουν σωστά αρκετούς δεκαδικούς αριθμούς στις δραστηριότητες της μελέτης μας.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι, αν τα παιδιά που διαβάζουν το δεκαδικό μέρος όπως και το ακέραιο, το κατανοούν ως ακέραιο ή ως δεκαδικό. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίδεται από τα λάθη των παιδιών που φανερώνουν ότι απλά μετέφεραν και προσάρμοζαν την προϋπάρχουσα γνώση των ακεραίων. Για παράδειγμα, στη γραφή των τιμών "0,07" και "2,09", πολλά παιδιά έγραψαν "0,7" και "2,9" αντίστοιχα. Στη σκέψη τους τα "9 λεπτά" μεταφράζονταν σε "μονάδες" και όχι σε "9 εκατοστά του ευρώ". Έτσι, όταν έγραφαν, μετέφεραν αυτούσια τη γνώση τους από τους ακέραιους αριθμούς, όπου ο αριθμός "9" δε συνηθίζεται να γράφεται ως "09". Η ερμηνεία μας αυτή υποστηρίζεται από τις δραστηριότητες ανάγνωσης των δεκαδικών τιμών. Η συντριπτική πλειονότητα των παιδιών από κάθε ηλικιακή ομάδα διάβασε τον αριθμό "0,3" ως "3 λεπτά", ενώ διάβασε σωστά τον αριθμό "0,90" ως "90 λεπτά". Για άλλη μια φορά, τα παιδιά προσέγγισαν τους δεκαδικούς αριθμούς μέσω των ακεραίων. Και στα δύο είδη αριθμών το 0 μπορεί να κατέχει τη θέση αξίας ψηφίου. Ωστόσο, ενώ στους ακέραιους η πρόσθεση μηδενικών στο δεξιά τέρμα του αριθμού αλλάζει την αξία τους (3, 30, 300...), στους δεκαδικούς δεν τροποποιείται ο αριθμός ($0,3 = 0,30 = 0,300...$). Είναι, λοιπόν, αναμενόμενο τα παιδιά που "διαβάζουν" τους δεκαδικούς μέσα από τη γνώση των ακεραίων να θεωρήσουν το 0,3 διαφορετικό και μικρότερο από το 0,30 (Resnick et al. 1989). Τα λάθη αυτά των παιδιών δικαιολογούν την εκτεταμένη χρήση του Κανόνα 1 κατά Sackur-Grisvard και Leonard (1985) σύμφωνα με τον οποίο τα παιδιά κρίνουν ως μικρότερο τον αριθμό εκείνο του οποίου το δεκαδικό μέρος έχει το μικρότερο ακέραιο αριθμό (π.χ. $8,3 < 8,18$, γιατί το $3 < 18$). Επιβεβαιώνουν έτσι την τάση των παιδιών να χρησιμοποιούν τα γνωστικά εργαλεία που ήδη κατέχουν, στην περίπτωσή μας τη γνώση των ακεραίων, για να κατανοήσουν το νέο πεδίο, αυτό των δεκαδικών.

Η γνωστική αυτή συμπεριφορά των παιδιών φανερώνει με την Πιαζετική έννοια ότι τα παιδιά ενεργά προσπαθούν να δομήσουν τη γνώση και να κατακτήσουν νέα πεδία της (Κρασσανάκης 2003). Όταν το παιδί έρθει αρχικά αντιμέτωπο με ένα νέο

συμβολικό σύστημα, στην περίπτωση μας αυτό των δεκαδικών αριθμών, θα προσπαθήσει να το κατανοήσει επιστρατεύοντας γνωστικά εργαλεία που έχει ήδη χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά σε πεδία που βρίσκονται εννοιολογικά κοντά στο νέο. Οι Sackur-Grisvard και Leonard (1985) θεωρούν αυτά τα αρχικά εργαλεία ως “ενδιάμεσες γνωστικές δομές” (intermediate cognitive organizations), γιατί βρίσκονται ανάμεσα στην παλιά και τη νέα γνώση. Μπροστά στη νέα γνώση τα παιδιά ενεργούν όπως προβλέπεται από τη λειτουργία της αφομοίωσης: αναπαριστούν τις νέες πληροφορίες με τέτοιο τρόπο, ώστε να ταιριάζουν στα προϋπάρχοντα σχήματά τους (Siegler 2002).

Επειδή η προϋπάρχουσα γνώση των ακεραίων είναι ικανή για την αντιμετώπιση κάποιων δεκαδικών προβλημάτων (βλέπε τις δραστηριότητες με υψηλό επίπεδο επίδοσης των παιδιών) ενδέχεται η προϋπάρχουσα γνώση να καθυστερήσει να έρθει σε γνωστική σύγκρουση με τη νέα και έτσι τα παιδιά να αργήσουν να τροποποιήσουν και να προσαρμόσουν τη σκέψη τους στα νέα δεδομένα. Στη μελέτη μας βλέπουμε ότι πολλά παιδιά, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες, διατηρούν μια κατάσταση γνωστικής ισορροπίας, όπου έχουν από τη μια υιοθετήσει σύμβολα από το πεδίο των δεκαδικών και από την άλλη δομές ακεραίων. Ωστόσο, δεν μπορούμε να αγνοήσουμε το σημαντικό ποσοστό παιδιών Δ' τάξης που αντιμετώπισε με επιτυχία ακόμα και τις πιο δύσκολες δραστηριότητες, στην πρώτη κιόλας φάση της έρευνας, προτού διδαχθεί στους δεκαδικούς αριθμούς στη σχολική τάξη. Τα παιδιά αυτά αναδιοργάνωσαν τα προϋπάρχοντα γνωστικά τους σχήματα για τους ακεραίους αριθμούς, για να ερμηνεύσουν τα νέα δεδομένα. Θα λέγαμε, χρησιμοποιώντας ορολογία από τις θεωρίες αναδιοργάνωσης της γνώσης (Βοσνιάδου και Brewer, 1992), ότι τα παιδιά αυτά έχουν προχωρήσει σε ριζοσπαστική αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης των ακεραίων, έχουν δημιουργήσει καινούριες δομές, προκειμένου να εξηγήσουν το νέο πεδίο αριθμών. Αυτού του είδους η αναδιοργάνωση της γνώσης κατά την Carey θεωρείται το αποτέλεσμα της επαυξημένης γνώσης του παιδιού πάνω σε ένα ειδικό θέμα και μπορεί να πηγάζει είτε από τις εμπειρίες του, είτε να είναι το αποτέλεσμα συστηματικής διδασκαλίας (Βοσνιάδου και Brewer, 1992). Χωρίς να μπορούμε να αποκλείσουμε την άτυπη παρέμβαση των γονέων, τα ευρήματα φανερώνουν ότι τα παιδιά με μεγαλύτερη εμπειρία με τους αριθμούς έχουν την ικανότητα να αφομοιώνουν τα νέα δεδομένα και να δομούν σχήματα για νέα πεδία αριθμών μέσα στο πλαίσιο της καθημερινής τους τριβής με αυτούς.

Κλειδί για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών θεωρείται: α) η κατανόηση της θέσης αξίας των δεκαδικών ψηφίων (Κολέζα 2000, Sowder 1997) όπου παρατηρούνται ομοιότητες, αλλά και σημαντικότερες διαφορές με τους ακεραίους (Resnick et al. 1989). Και στα δύο είδη αριθμών η θέση αξίας των ψηφίων μειώνεται καθώς κινούμαστε από αριστερά προς τα δεξιά. Ωστόσο, η ονομασία της θέσης αξίας των ψηφίων αλλάζει ριζικά. Στους ακεραίους η ακολουθία της θέσης αξίας ψηφίων από δεξιά προς αριστερά είναι μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κ.ο.κ, ενώ στους δεκαδικούς αριθμούς η θέση αξίας ψηφίων από αριστερά προς τα δεξιά αρ-

χίζει με δέκατα και συνεχίζει με εκατοστά, χιλιοστά, κ.ο.κ. Και ενώ στους ακεραίους αριθμούς η εκατοντάδα είναι μεγαλύτερη από τη δεκάδα, στους δεκαδικούς αριθμούς το δέκατο είναι μεγαλύτερο από το εκατοστό. β) Οι Resnick et al. (1989) υπογραμμίζουν την ουσιαστική γνώση και κατανόηση των ισοτήτων: 1 δέκατο = 10 εκατοστά = 100 χιλιοστά, η οποία γνώση, όπως αναφέρουν, παρεμποδίζεται από την προϋπάρχουσα γνώση των ακεραίων αριθμών, όπου 1 δεκάδα δεν ισούται με 10 εκατοντάδες!

Για το λόγο ακριβώς αυτό απαιτείται συστηματική διδασκαλία και μελέτη των δεκαδικών. Τα ευρήματα παρεμβατικών μελετών έχουν δείξει ότι πρέπει να βοηθήσουμε τα παιδιά να δώσουν νόημα και περιεχόμενο στους δεκαδικούς αριθμούς από την πρώτη κιόλας στιγμή της διδασκαλίας τους. Όσο περισσότερο χρόνο αφιερώνει ο εκπαιδευτικός στην κατανόηση του πλήθους που εκφράζει ο αριθμός και της θέσης αξίας των ψηφίων του, τόσο λιγότερο χρόνο θα χρειαστεί να αφιερώσει αργότερα στη διδασκαλία των αλγορίθμων των τεσσάρων πράξεων (Hiebert 1992, Sowder 1997, Zvia and Sowder 1994). Αλγοριθμική γνώση χωρίς νοηματική στήριξη είναι εύκολο να ξεχασθεί ή να εφαρμοσθεί εσφαλμένα (Κολέζα 2000). Σημαντική προς αυτή την κατεύθυνση είναι η αναπαράσταση δεκαδικών ποσοτήτων με απτό και συγκεκριμένο υλικό. Συγκεκριμένα, οι Wearne and Hiebert (1988) προτείνουν μια θεωρία πέντε γνωστικών βημάτων με ιδιαίτερη βαρύτητα στα πρώτα δύο βήματα, που αφορούν τη σημασιολογία των δεκαδικών και περιγράφονται εδώ.¹ Το πρώτο βήμα αναφέρεται στη διαδικασία σύνδεσης (Connecting Process) κατά την οποία τα νέα μαθηματικά σύμβολα αποκτούν νόημα μέσα από την περιγραφή απτών και οικείων ποσοτήτων. Το παιδί θα καταλάβει π.χ. τον αριθμό 1,23 αν τον συνδέσει με το 1 μέτρο και 23 εκατοστά ή το 1 ευρώ και 23 λεπτά. Οι Wearne και Hiebert (1988) υπογραμμίζουν τη σπουδαιότητα της εμπειρίας και οικειότητας των παιδιών με το υλικό αναφοράς που θα χρησιμοποιηθεί για την εισαγωγή των αριθμών αυτών. Το δεύτερο βήμα αναφέρεται στη διαδικασία ανάπτυξης (Developing Process), κατά την οποία οι ενέργειες επί του υλικού απεικονίζονται με μαθηματικά σύμβολα. Για παράδειγμα, όταν προσθέτουμε δεκαδικούς αριθμούς που αναπαριστούν χρήματα, συνδυάζουμε υποδιαιρέσεις της αυτής αξίας. Συμβολικά, αυτή η ενέργεια αναπαρίσταται προσθέτοντας ψηφία με την ίδια θέση αξίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να βγαίνει αβίαστα ο κανόνας ότι στην κάθετη πρόσθεση πρέπει να βάζουμε στην ίδια ευθεία ψηφία της αυτής αξίας. Με τον τρόπο αυτό τα σύμβολα αποκτούν νόημα και το παιδί κατανοεί τη λογική των κανόνων και των διαδικασιών που ακολουθεί.

Όσον αφορά στη διδασκαλία των δεκαδικών θα πρέπει να ληφθεί υπόψη η ακόλουθη επισήμανση. Τα κοινά σημεία μεταξύ ακεραίων και δεκαδικών, μπορεί να δημιουργήσουν στα παιδιά την εντύπωση ότι το νέο σύστημα αριθμών είναι όμοιο με αυτό των ακεραίων. Η εντύπωση αυτή ενδέχεται να ενισχυθεί από τον ίδιο τον

1. Για αναλυτική παρουσίαση του μοντέλου διδασκαλίας των δεκαδικών των Wearne and Hiebert (1988) στα ελληνικά, βλέπε από το βιβλίο της Κολέζα (2000) τις σελίδες 168-173.

εκπαιδευτικό, ο οποίος στην προσπάθεια του να εισάγει ομαλά τους δεκαδικούς, θα ανατρέξει στις ομοιότητές τους με τους ακέραιους (Resnick et al. 1989). Όπως, όμως, τονίζει η Κολέζα (2000) αυτή η υπεραπλούστευση έχει ως αποτέλεσμα την εξαφάνιση κάθε σχέσης μεταξύ νοηματικής και αλγοριθμικής γνώσης. Το κενό μεταξύ νοηματικής και αλγοριθμικής γνώσης καταδείχθηκε μέσα από την ποιοτική ανάλυση των λαθών των παιδιών. Αν στη μελέτη μας είχαμε αξιολογήσει μόνο το επίπεδο επίδοσης, θα καταλήγαμε στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι έχουν ικανοποιητική γνώση των δεκαδικών αριθμών. Έχει βρεθεί ότι σε πολλές σχολικές δραστηριότητες και ασκήσεις με δεκαδικούς, τα παιδιά μπορεί να δώσουν τη σωστή απάντηση, αλλά για λάθος λόγο, δημιουργώντας τόσο στα ίδια όσο και στους εκπαιδευτικούς τη λανθασμένη εντύπωση ότι κατανοούν τους δεκαδικούς (Sackur-Grisvard and Leonard 1985). Οι Wearne and Hiebert (1988) τονίζουν ότι η ελλιπής νοηματική γνώση και οι παρανοήσεις για τους δεκαδικούς είναι δύσκολο να καλυφθούν και να διορθωθούν εκ των υστέρων, ακόμα και αν παρασχεθεί εξειδικευμένη βοήθεια. Για το λόγο αυτό ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι προσεκτικός στην επιλογή των δραστηριοτήτων εισαγωγής και αξιολόγησης της νέας γνώσης.

Θεωρούμε ότι το νέο νόμισμα του ευρώ προσφέρει μια ακόμα ευκαιρία νοηματοδότησης των δεκαδικών αριθμών. Είναι ένας ζωντανός και εύληπτος τρόπος σύνδεσης του εννοιολογικού πεδίου των δεκαδικών με την εμπειρία των παιδιών, χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει ότι πρέπει να είναι και ο μόνος. Η παρουσίαση χρηματικών παραδειγμάτων για αυτό το σκοπό, έχει προταθεί και θετικά αξιολογηθεί στην αγγλόφωνη βιβλιογραφία, καθώς χώρες όπως οι ΗΠΑ, το Ηνωμένο Βασίλειο και τη Γαλλία χρησιμοποιούσαν ήδη νομίσματα με δεκαδικές υποδιαίρεσεις (Martinie and Bay-Williams 2003, Wearne and Hiebert 1988). Πρέπει να τονίσουμε, όμως, ότι τα παραδείγματα με χρηματικά ποσά είναι ένας από τους εισαγωγικούς τρόπους αναπαράστασης δεκαδικών. Από κει και πέρα πρέπει να προκαλέσουμε τη σκέψη των παιδιών μέσα από πιο σύνθετα αναπαραστατικά μοντέλα, όπως είναι τα δεκαδικά τετράγωνα, οι σχέσεις επιφανειών, η αριθμογραμμή (Κολέζα 2000) και δραστηριότητες μετάβασης από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη (Κολέζα 2000). Έχει βρεθεί, για παράδειγμα, ότι παιδιά ηλικίας 12 ετών δεν έχουν πρόβλημα να αναπαραστήσουν ένα δεκαδικό αριθμό με νομίσματα, έχουν όμως δυσκολίες να βρουν τη θέση του στην γραμμή των αριθμών (Martinie and Bay-Williams 2003). Στο σημείο αυτό βρίσκεται και ένας περιορισμός της μελέτης μας. Στην έρευνά μας εξετάσαμε κυρίως την νοηματική κατανόηση των δεκαδικών σε ένα *πρώτο επίπεδο* και μέσα σε ένα *πολύ συγκεκριμένο πλαίσιο*, αυτό του ευρώ. Είναι ενδεχόμενο, η γνώση που επέδειξαν τα παιδιά να είναι στενά συνυφασμένη με το συγκεκριμένο πλαίσιο και να μην γενικεύσιμη στους δεκαδικούς αριθμούς ευρύτερα. Επιπλέον, στη μελέτη μας οι δεκαδικοί αριθμοί είχαν μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία. Προκειμένου να είμαστε πεπεισμένοι για την νοηματική κατανόηση των δεκαδικών, τα παιδιά πρέπει να δοκιμαστούν σε ποικιλία δραστηριοτήτων, όπως π.χ. σε ασκήσεις διάταξης κατά αύξουσα ή φθίνουσα σειρά, με αριθμούς πλέον των δύο δεκαδικών ψηφίων (Sackur-Grisvard and Leonard 1985) και σε διαφορετικά μοντέλα αναπαράστασης (Κολέζα 2000).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- Carpenter, T. P. and Moser, J. M. (1983), The acquisition of addition and subtraction concepts, in R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 7-44, New York: Academic Press
- Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E. and Weisbeck, L. (1993), Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem solving processes, *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 428-441
- Fischbein, E., Deri, M. Nello, M. S. and Marino, M. S. (1985), The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 3-17
- Foulin, J.-N. and Mouchon, S. (2002), *Εκπαιδευτική Ψυχολογία*, Αθήνα: Μεταίχμιο
- Grossman, A. S. (1983), Decimal notation: An important research finding, *Arithmetic Teacher*, 30(9), 32-33
- Hanson, S. A. and Hogan, T. P. (2000), Computational estimation skill of college students, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 483-499
- Hiebert, J. (1987), Research report: Decimal fractions, *Arithmetic Teacher*, 34, 22-23
- Hiebert, J. (1992), Mathematical, cognitive and instructional analyses of decimal fractions, In G. Leinhardt, R. Putnam and R. A. Hattup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates
- Holmes, E. E. (1995), *New directions in elementary school mathematics*, New Jersey: Prentice-Hall
- Hughes, M. (1986), *Children and number: Difficulties in learning mathematics*, Oxford: Blackwell Publishers
- Martinie, S. L. and Bay-Williams, J. (2003), Investigating students' conceptual understanding of decimal fractions using multiple representations, *Mathematics Teaching in Middle School*, 8(5), 244-247
- Moss, J. and Case, R. (1999), Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147
- Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. and Peled, I. (1989), Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 8-27
- Riley, M. S., Greeno, J. G. and Heller, J. I. (1983), Development of children's problem-solving ability in arithmetic, in H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*, 153-196, New York: Academic Press
- Sackur-Grisvard, C. and Leonard, F. (1985), Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: the order of positive decimal numbers, *Cognition and Instruction*, 2(2), 157-174
- Siegler, R. S. (2002), *Πώς σκέφτονται τα παιδιά*, Αθήνα: Gutenberg
- Sowder, J. (1997), Place value as the key to teaching decimal operations, *Teaching Children Mathematics*, 3, 448-453
- Wearne, D. and Hiebert, J. (1988), Constructing and using meaning for mathematical symbols: The case of decimal fractions, In J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in middle school*, 220-253, Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics

- Zvia, M. and Sowder J. (1994), Developing number sense: An intervention study in grade 7, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29
- Βοσνιάδου, Σ. και Brewer, W. F. (1992), Θεωρίες αναδιοργάνωσης της γνώσης, στο Στ. Βοσνιάδου (Επιμ.), *Κείμενα εξελικτικής ψυχολογίας, Σκέψη*, (τόμος Β'), Αθήνα: Gutenberg
- Κολέζα, Ε. (2000), *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών*, Αθήνα: Leader Books
- Κορνηλάκη, Α. (2003), Η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων από παιδιά προσχολικής ηλικίας, *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 35, 131-147
- Κρασσανάκης, Γ. (2003), *Ψυχολογία παιδιού και εφήβου*, Ηράκλειο