

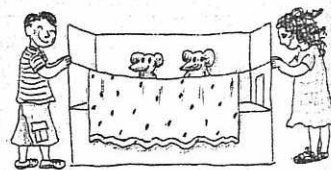
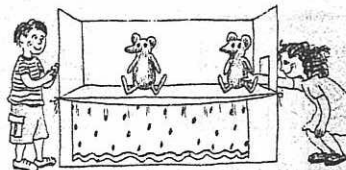
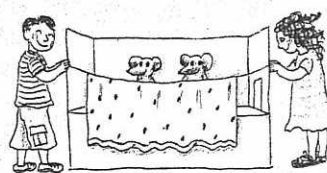
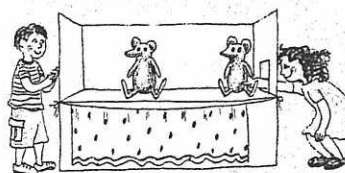
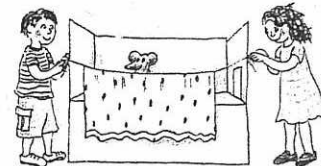
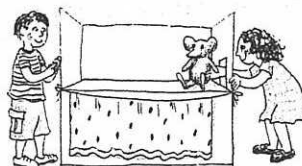
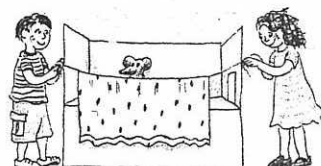
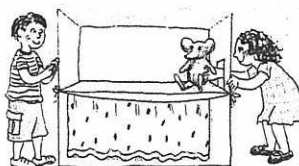
Βήματα στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης στην πρώιμη παιδική ηλικία

της Κατερίνας Κορνηλάκη*

Ακολουθία

Στο ερώτημα «Πότε τα παιδιά αρχίζουν να μαθαίνουν μαθηματικά», οι περισσότεροι ίσως θα απαντήσουν ότι τα παιδιά αρχίζουν να μαθαίνουν μαθηματικά με την είσοδό τους στο σχολείο. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι τότε αρχίζει η επίσημη διδασκαλία των μαθηματικών, ωστόσο θα ήταν λάθος μας να υποθέσουμε ότι έως εκείνη τη στιγμή δεν έχουν μάθει τίποτα σε σχέση με τα μαθηματικά.

Πράγματι, μελέτες έχουν δείξει ότι τα παιδιά, από τη βρεφική ακόμα ηλικία, μπορούν να διακρίνουν οπτικά ερεθίσματα που διαφέρουν ως προς το πλήθος τους. Οι μελέτες αυτές χρησιμοποίησαν την τεχνική του εθισμού: η τεχνική αυτή αξιολογεί την αντίδραση του βρέφους σε ένα καινούργιο ερέθισμα, μετά τον εθισμό του σε ένα προηγούμενο ερέθισμα.



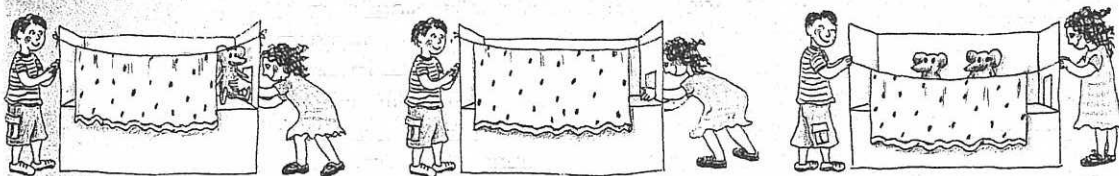
* Η Κατερίνα Κορνηλάκη είναι λέκτορας Ψυχολογίας στο Παιδαγωγικό Τμήμα Προσχολικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Για παράδειγμα, για να εξετάσουμε την ικανότητα των βρεφών να διακρίνουν ερεθίσματα που διαφέρουν ως προς το πλήθος τους, παρουσιάζουμε στα βρέφη μια σειρά από δύο κουκκίδες. Όταν το βρέφος έλθει για πρώτη φορά σε επαφή με το οπτικό

αυτό ερέθισμα, αυξάνονται τα επίπεδα της προσοχής του. Ύστερα όμως από λίγο, το βρέφος εθίζεται και η προσοχή του μειώνεται. Σ' αυτή ακριβώς τη χρονική στιγμή, δηλαδή στη στιγμή του εθισμού, παρουσιάζουμε στο βρέφος δύο ερεθίσματα.

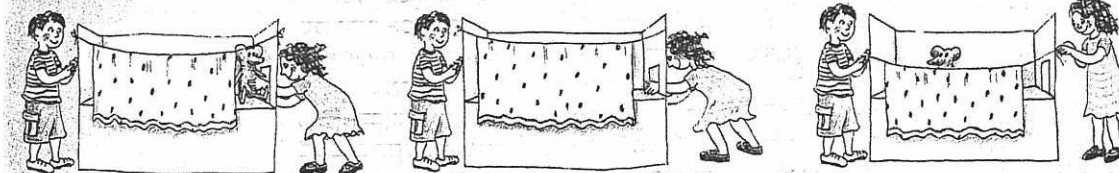
γεγονότων από τους πειραματισμούς της K. Wynn με βρέφη 5 μηνών (Wynn 1992)¹

Ακολουθία γεγονότων «1+1»: Φάση I – Συνθήκη ελέγχου



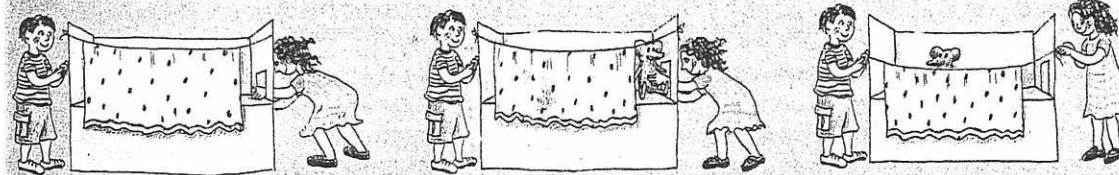
Το παραβάν κατεβαίνει αποκαλύπτοντας δύο αντικείμενα (αναμενόμενο αποτέλεσμα).

Ακολουθία γεγονότων «1+1»: Φάση II – Πειραματική συνθήκη



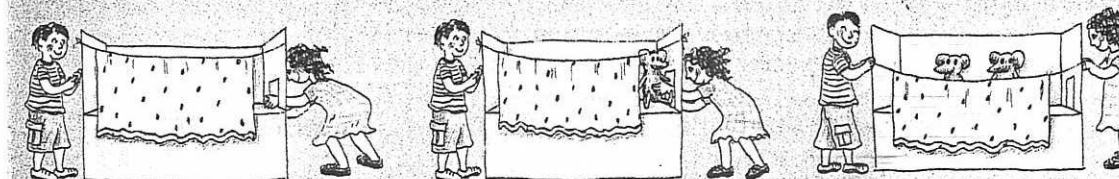
Το παραβάν κατεβαίνει αποκαλύπτοντας ένα αντικείμενο (μη αναμενόμενο αποτέλεσμα).

Ακολουθία γεγονότων «2-1»: Φάση I – Συνθήκη ελέγχου



Το παραβάν κατεβαίνει αποκαλύπτοντας ένα αντικείμενο (αναμενόμενο αποτέλεσμα).

Ακολουθία γεγονότων «2-1»: Φάση I – Πειραματική συνθήκη



Το παραβάν κατεβαίνει αποκαλύπτοντας δύο αντικείμενα (μη αναμενόμενο αποτέλεσμα).

1. Βλ. σχετικά σελ. 60.

Ένα ερέθισμα με δύο κουκκίδες στη σειρά, όπως ακριβώς και προηγουμένως, και ένα νέο ερέθισμα με τρεις κουκκίδες. Αν τα βρέφη διακρίνουν την ποσοτική διαφορά ανάμεσα στα δύο ερεθίσματα, αναμένεται να κοιτάξουν το νέο ερέθισμα των τριών κουκκίδων για περισσότερο χρόνο, αφού ως γνωστόν τα βρέφη κοιτάζουν για περισσότερο χρόνο νέα ερεθίσματα. Τα αποτελέσματα των μελετών αυτών έχουν δείξει ότι τα βρέφη μπορούν να διακρίνουν σύνολα που ποικίλουν από ένα έως τέσσερα στοιχεία ως προς το πλήθος τους (Starkey & Cooper 1980, Starkey, Spelke & Gelman 1983).

Ακόμα πιο εντυπωσιακά είναι τα αποτελέσματα των μελετών της Wynn (1992), που έδειξαν ότι βρέφη ηλικίας μόλις πέντε μηνών μπορούν να διακρίνουν, σε ορισμένες συνθήκες, τότε μια ποσότητα αυξάνεται και τότε μειώνεται. Στην Ακολουθία γεγονότων «1+1» η Wynn παρουσίασε σε βρέφη αυτής της ηλικίας ένα παιχνιδι-ποντίκι· αμέσως μετά ένα παραβάν έκρυψε το ποντίκι. Στη συνέχεια το βρέφος είδε να εμφανίζεται ένα χέρι και να αφήνει άλλο ένα ποντίκι πίσω από το παραβάν. Κατά την πρώτη φάση της δοκιμασίας «1+1» (Συνθήκη ελέγχου), το παραβάν κατέβαινε και το βρέφος έβλεπε δύο ποντίκια. Κατά τη δεύτερη φάση (Πειραματική συνθήκη), η ίδια ακολουθία ενεργειών πραγματοποιούνταν, αλλά όταν το παραβάν κατέβαινε αποκαλυπτόταν ένα ποντίκι (μη αναμενόμενο αποτέλεσμα).

Στη Ακολουθία γεγονότων «2-1» πραγματοποιούνταν αντίστοιχες φάσεις (Συνθήκη ελέγχου καθώς και Πειραματική συνθήκη).

Κάθε φορά που κατέβαινε το παραβάν, η ερευνήτρια μετρούσε το χρόνο που το βρέφος κοιτούσε το ποντίκι ή τα ποντίκια, ανάλογα με τις φάσεις των δοκιμασιών. Βρέθηκε ότι ο χρόνος που το βρέφος παρατηρούσε το παράδοξο, μη αναμενόμενο γεγονός (βλ. φάση II και για τις δύο Πειραματικές συνθήκες) ήταν σημαντικά περισσότερος από το χρόνο που παρατηρούσε το αναμενόμενο γεγονός, πράγμα που φανερώνει την έκπληξή του. Κατά τη Wynn, αυτή η έκπληξη δείχνει ότι ακόμα και στην ηλικία των πέντε μηνών τα βρέφη διαθέτουν μαθηματική σκέψη, αφού κατανοούν τότε αυξάνεται και τότε μειώνεται μια ποσότητα.

Η μαθηματική σκέψη των μικρών παιδιών εκδηλώνεται καθημερινά σε συμπεριφορές που μπορούμε εύκολα να τις παρατηρήσουμε, εκτός φυσικά από εκείνες που γίνονται εμφανείς μόνο σε εργαστηριακές συνθήκες. Μία από τις πρώτες μαθηματικές δραστηριότητες στις οποίες επιδίδεται το μικρό παιδί είναι αυτή της μέτρησης. Πολλά παι-

διά ηλικίας τριών και τεσσάρων ετών γνωρίζουν να εκφωνούν ένα μέρος της ακολουθίας των φυσικών αριθμών (1, 2, 3, 4...). Σίγουρα πρόκειται για ένα σημαντικό βήμα. Η ικανότητα για αρίθμηση, όμως, είναι κάτι περισσότερο από την ικανότητα εκφώνησης της ακολουθίας των φυσικών αριθμών. Για να πούμε ότι ένα μικρό παιδί γνωρίζει να μετράει, θα πρέπει να μπορεί να διαπιστώνει το πλήθος ενός συνόλου. Η ορθή διαπίστωση του πλήθους ενός συνόλου προϋποθέτει την τήρηση ορισμένων κανόνων ή αρχών. Οι τρεις πρώτες από τις αρχές που διατύπωσαν οι Gelman & Gallistel (1978), και οι οποίες αναφέρονται στον τρόπο με τον οποίο απειριθμούμε, είναι οι ακόλουθες:

- *Η αρχή της ένα προς ένα αντιστοιχίας.* Σύμφωνα με την αρχή αυτή, κάθε στοιχείο του συνόλου πρέπει να μετρηθεί μία και μόνο φορά. Αν κάποιο στοιχείο ξεχαστεί ή μετρηθεί δύο φορές ή αν το παιδί μετράει χωρίς να αντιστοιχίζει κάθε λέξη-αριθμό που εκφέρει με ένα στοιχείο του συνόλου, τότε η απαρίθμηση θα είναι λανθασμένη.

- *Η αρχή της σταθερής παραγωγής της ακολουθίας των αριθμών.* Αυτό σημαίνει ότι για να είναι επιτυχής η απαρίθμηση, θα πρέπει, καθώς μετριοούνται τα στοιχεία του συνόλου, να εκφέρονται οι αριθμοί με τη σωστή τους σειρά (1, 2, 3, 4...). Διαφορετικά, κάθε φορά που μετριέται το ίδιο σύνολο, θα καταλήγει κανείς σε διαφορετικό πλήθος στοιχείων.

- *Η αρχή της πληθικότητας.* Σύμφωνα με την αρχή αυτή, ο τελευταίος αριθμός που εκφέρεται κατά την απαρίθμηση εκφράζει το πλήθος του συνόλου που μετρήθηκε.

Τα αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά, γύρω στα τρία χρόνια, τα καταφέρνουν αρκετά καλά με τη τήρηση αυτών των αρχών, αρκεί τα σύνολα να μην είναι μεγάλα. Η Fuson (1988) βρήκε ότι τα μικρά παιδιά τα καταφέρνουν καλύτερα στη μέτρηση αντικειμένων, σε περιπτώσεις που τα στοιχεία προς μέτρηση βρίσκονται σε ευθεία διάταξη και έχουν μεταξύ τους σταθερά διαστήματα. Τα ίδια παιδιά έχουν δυσκολίες ή αποτυγχάνουν σε περιπτώσεις μέτρησης αντικειμένων που βρίσκονται σε τυχαία διάταξη. Για ποιο λόγο παρατηρείται αυτή η διαφορά; Η Fuson θεωρεί ότι τα παιδιά που επιτυγχάνουν μόνο στην πρώτη περίπτωση ενδέχεται να μην έχουν κατανοήσει πλήρως την αρχή της ένα προς ένα αντιστοιχίας. Απλώς, λόγω της συμμετρίας στη διάταξη, αντιμετωπίζουν τη μέτρηση σαν μια ρυθμική δραστηριότητα. Μετρούν με τον ίδιο τρόπο που θα ανέβαιναν μια σκάλα: ξεκινούν από το πρώτο στοιχείο/

σκαλοπάτι και σταματούν στο τελευταίο, αντιστοιχίζοντας ρυθμικά κάθε στοιχείο με μια λέξη-αριθμό. Στις τυχαίες, όμως, διατάξεις, εκεί όπου η συμμετρία χάνεται, συχνά δεν τηρούν την αρχή αυτή.

Για το λόγο αυτό, θα πρέπει να δίνουμε στα μικρά παιδιά την ευκαιρία να μετρούν στοιχεία που είναι τοποθετημένα σε ποικίλες διατάξεις. Όταν το παιδί καλείται να μετρήσει πόσα στοιχεία περιέχονται σε μια τυχαία ή ακόμα και μορφοποιημένη διάταξη, όπου η αρχή και το τέλος δεν ορίζονται σαφώς (όπως, για παράδειγμα, σε έναν κύκλο ή σε ένα τρίγωνο φτιαγμένο με τελείες), θα πρέπει να βρει έναν τρόπο να μην ξαναμετρήσει τα στοιχεία που έχει ήδη αριθμήσει, πρόβλημα το οποίο δεν αντιμετωπίζει, όταν τα στοιχεία βρίσκονται τοποθετημένα σε μια ευθεία διάταξη. Το παιδί που διαπιστώνει αυτή την ανάγκη κατανοεί σίγουρα την αρχή της ένα προς ένα αντιστοιχίας. Ο πιο αποτελεσματικός τρόπος για να το πετύχει είναι να ξεχωρίζει τα μετρημένα από τα μη μετρημένα στοιχεία. Αυτό μπορεί εύκολα να το καταφέρει με δύο τρόπους. Όταν μετράει κινητά αντικείμενα (πούλιες, μολύβια κ.ο.κ.), μπορεί να βάζει χωριστά ό,τι έχει μετρηθεί. Όταν πάλι μετράει ακίνητα στοιχεία, π.χ. τις τελείες από τις οποίες αποτελείται ένας κύκλος, μπορεί να βάζει ένα σημάδι στο σημείο εκκίνησης της απαρίθμησης.

Η ικανότητα αρίθμησης είναι ένα εργαλείο σκέψης. Για να είναι, όμως, χρήσιμο αυτό το εργαλείο, θα πρέπει να ξέρει κανείς πώς και πότε να το χρησιμοποιήσει.

Πρώτος ο Piaget (1965) υποστήριξε ότι υπάρχει περίπτωση το μικρό παιδί να ξέρει μεν να μετράει ως ένα βαθμό, αλλά να μην καταφεύγει στο μέτρημα για να δώσει λύση σε κάποιο πρόβλημα. Ο Piaget, στα σχετικά πειράματά του, έδειχνε σε παιδιά ηλικίας τριών έως έξι ετών πούλιες, οι οποίες, τοποθετημένες πάνω στο τραπέζι, σχημάτιζαν κάποιο σχήμα π.χ. ένα σταυρό, ένα τετράγωνο κ.ο.κ. Ζητούσε από τα παιδιά να αναπαραγάγουν επακριβώς το κάθε σχήμα, παίρνοντας από ένα σωρό τόσες πούλιες όσες θα τους ήταν απαραίτητες. Σε γενικές γραμμές παρατήρησε ότι, αν και τα παιδιά αυτά ήξεραν να μετρούν, δε χρησιμοποίησαν το μέτρημα για να επιλύσουν το πρόβλημα. Τα πιο μικρά παιδιά έφτιαχναν κάτι που έμοιαζε με το σχήμα που είχαν μπροστά τους, χωρίς όμως να φροντίζουν για την ακριβή αναπαραστάσή του. Τα κάπως μεγαλύτερα παιδιά προσπαθούσαν να αναπαραστήσουν πιστά το σχήμα, αλλά η μέθοδος που υιοθετούσαν δεν ήταν πάντα αποτελεσματική.

Προσπαθούσαν να φτιάξουν το σχήμα με αντιστοιχία ένα προς ένα, αλλά όταν το σχήμα αποτελούνταν από πολλές πούλιες, ήταν δύσκολο να το καταφέρουν. Από το σύνολο των παιδιών μόνο τα μεγαλύτερα παιδιά κατέφυγαν στο μέτρημα για να αναπαραστήσουν πιστά τα σχήματα.

Ένας άλλος τρόπος για να δούμε αν τα παιδιά που ξέρουν να μετρούν αξιοποιούν αυτή τους την ικανότητα, είναι να τους ζητήσουμε να συγκρίνουν δύο σύνολα. Όταν τα συγκρινόμενα σύνολα βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία, τότε δεν είναι απαραίτητο να καταφύγουμε στο μέτρημα. Όταν, όμως, δεν είναι σε αντιστοιχία ως προς τα στοιχεία που τα συγκροτούν ή όταν είναι τυχαία διατεταγμένα, πρέπει οπωσδήποτε να μετρηθούν. Είναι γνωστά τα πειράματα διατήρησης του αριθμού του Piaget (1965). Στα πειράματα αυτά δύο σειρές αντικειμένων με αρκετά μεγάλο αριθμό στοιχείων που είχαν και συμπληρωματική μεταξύ τους σχέση (π.χ. αυγά και αυγοθήκες) τοποθετούνταν σε αντιστοιχία ένα προς ένα. Τα μικρά παιδιά βεβαίωναν την αριθμητική τους ισότητα και στη συνέχεια ο/η πειραματιστής/-ρια άπλωνε περισσότερο τη μία από τις δύο σειρές. Στη συνέχεια τα παιδιά ρωτιούνταν αν η μία σειρά είχε τόσα στοιχεία όσα και η άλλη (ενδεικτικά «Οι αυγοθήκες είναι τόσες όσες και τα αυγά ή μήπως έχουμε πιο πολλές ή πιο λίγες αυγοθήκες απ' ό,τι αυγά;»). Πολλά παιδιά έκριναν ότι η μεγαλύτερη σε μέγεθος σειρά είχε και τα περισσότερα αντικείμενα.

Το ερώτημα που προκύπτει και ενδιαφέρει όλους όσοι ασχολούνται με την εκπαίδευση των μικρών παιδιών είναι αν μπορούμε να τα βοηθήσουμε να αξιοποιήσουν τη γνώση τους να μετρούν και να απαριθμούν. Τα αποτελέσματα της μελέτης του Cowan κ.ά (1993) είναι ενθαρρυντικά. Αυτό που τα μικρά παιδιά έχουν ανάγκη είναι να τους δείξουμε τρόπους να συγκρίνουν σύνολα. Πρέπει όμως να πούμε ότι δεν μπορούμε να αναμένουμε από όλα τα παιδιά της μικρής ηλικίας να ωφεληθούν στον ίδιο βαθμό από την παρέμβασή μας αυτή, καθώς συχνά τα μικρά παιδιά ηλικίας τριών έως τεσσάρων ετών δεν κατανοούν την πληθικότητα του αριθμού. Έτσι, ενδέχεται να κρίνουν ότι δύο σύνολα έχουν π.χ. πέντε στοιχεία το καθένα, αλλά να θεωρούν ότι το ένα πέντε είναι μεγαλύτερο από το άλλο.

Ένα από τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι αν τα παιδιά που ξέρουν να μετρούν και να απαριθμούν κατανοούν τη λογική του αριθμητικού μας συστήματος.² Η Terezinha Nunes και ο Peter Bryant προσδιορίζουν δύο κριτήρια που τα κρίνουν απαραίτητα για να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει κατανόηση του αριθμητικού συστήματος. Το πρώτο κριτήριο αφορά την κατανόηση του *σχετικού μεγέθους των μονάδων*, πιστεύουν δηλαδή ότι το παιδί που μετράει δεν πρέπει απλά να γνωρίζει την ακολουθία των αριθμών, αλλά και να κατανοεί τη *σχετική αξία των μονάδων* (the relative value of units) που χρησιμοποιεί, όταν μετράει. Όταν μετράμε, χρησιμοποιούμε μονάδες διαφορετικού μεγέθους, όπως μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες κ.ο.κ., οι οποίες διαφέρουν ποσοτικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ο Γιάννης έχει ένα δεκάλεπτο και ο Νίκος ένα εικοσάλεπτο. Παρόλο που και οι δύο έχουν τον ίδιο αριθμό νομισμάτων, εντούτοις ο Νίκος έχει περισσότερα χρήματα, γιατί το νόμισμά του είναι μεγαλύτερης αξίας. Η κατανόηση του σχετικού μεγέθους των μονάδων είναι σημαντική, όχι μόνο για το αριθμητικό μας σύστημα, αλλά και για άλλες μετρήσεις στις οποίες συνδυάζουμε διαφορετικές μονάδες. Για παράδειγμα, το ύψος ενός παιδιού μπορεί να είναι 1 μέτρο και 25 εκατοστά.

Το δεύτερο κριτήριο που θέτουν η Nunes και ο Bryant είναι η κατανόηση της *σύνθεσης των αριθμών*. Στο αριθμητικό μας σύστημα κάθε αριθμός «*n*» μπορεί να συντεθεί από αριθμούς οι οποίοι προηγούνται στην αριθμητική ακολουθία, και των οποίων το άθροισμα μας δίνει τον «*n*». Π.χ. ο αριθμός 8 μπορεί να παραχθεί από το 7 συν 1 ή το 6 συν 2 κ.ο.κ. Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως η *προσθετική σύνθεση των αριθμών* (additive composition of numbers). Όταν το μικρό παιδί μετράει, το μόνο ίσως που αντιλαμβάνεται είναι π.χ. ότι ο αριθμός 12 ακολουθεί τον αριθμό 11. Είναι πιθανόν να μην καταλαβαίνει τη σύνθεση του αριθμού αυτού, τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να παραχθεί, να συγκροτηθεί. Ένας λόγος που ενδέχεται να εμποδίζει την κατανόηση της σύνθεσης των αριθμών είναι και η ίδια η ασυνέπεια στην ονομασία των αριθμών, που παρατηρείται τόσο στην ελληνική όσο και στις περισσότερες ευρωπαϊκές γλώσσες. Βέβαια υπάρχουν και γλώσσες, όπως τα γαλιωνέζικα, τα κορεάτικα, τα

μανδαρίνικα κ.ά., στις οποίες τα ονόματα των αριθμών είναι, θα λέγαμε, «διαφανή» και αποκαλύπτουν πλήρως τη σύνθεσή τους³ (θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες οι συγκριτικές μελέτες σ' αυτό το χώρο).

Προκειμένου να ελέγξουμε αν τα παιδιά που ξέρουν να μετρούν κατανοούν το σχετικό μέγεθος των μονάδων και την προσθετική σύνθεση των αριθμών, σχεδιάσαμε μια μελέτη με την Terezinha Nunes (Kornilaki & Nunes 1996). Εξετάσαμε πενήντα μικρά παιδιά που είχαν φοιτήσει σε νηπιαγωγεία της πόλεως του Ηρακλείου Κρήτης, με μέσο όρο ηλικίας τα 5,5 έτη. Τα παιδιά αυτά γνώριζαν να μετρούν σωστά, τουλάχιστον μέχρι τον αριθμό 29. Το ερώτημά μας ήταν αν η ικανότητα που είχαν στο μέτρημα τους εξασφάλιζε και την κατανόηση του σχετικού μεγέθους και της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών. Για το λόγο αυτό, τα εξετάσαμε σε μια σειρά από δραστηριότητες.

Για να ελέγξουμε την κατανόηση του σχετικού μεγέθους, παρουσιάσαμε στα παιδιά δύο σειρές από κέρματα. Οι σειρές ήταν τοποθετημένες σε ένα προς ένα αντιστοιχία. Λέγαμε στο παιδί ότι η μία σειρά ήταν δική του και η άλλη ανήκε στον ερευνητή. Το ερώτημα που θέταμε ήταν: «Αν πάρει ο καθένας τα δικά του χρήματα και μετά πάμε σ' ένα μαγαζί με καραμέλες, μπορούμε να αγοράσουμε τον ίδιο αριθμό καραμέλες ή κάποιος από τους δύο μπορεί να πάρει περισσότερες;».

Τα παιδιά εξετάστηκαν σε τρεις συνθήκες. Στην πρώτη συνθήκη και οι δύο σειρές είχαν κέρματα της ίδιας αξίας, που διέφεραν όμως ως προς τον αριθμό. Για παράδειγμα, η μία σειρά είχε τρία και η άλλη δύο δεκάρικά. Στη δεύτερη συνθήκη, οι σειρές είχαν τον ίδιο αριθμό κερμάτων, διαφορετικής όμως αξίας. Για παράδειγμα, η μία σειρά είχε δύο δεκάρικά και η άλλη δύο κέρματα της μίας δραχμής.

2. Βλ. σχετικά Terezinha Nunes. 2001. Μπορούμε να κάνουμε κάθε παιδί «ενάριθμο»; *γέφυρες* 1: 54-61.

3. Στο ίδιο.

**Δραστηριότητες κατανόησης
του σχετικού μεγέθους των αριθμών⁴**

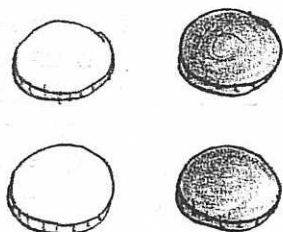
Κίτρινο: 1 δραχμή, Μπλε: δεκάρικο, Κόκκινο = εικοσάρικο



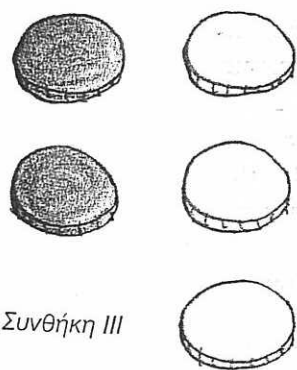
Συνθήκη I

Και στις δύο αυτές συνθήκες το παιδί μπορούσε να κρίνει ποιος από τους δύο είχε τη μεγαλύτερη αγοραστική δύναμη, εξετάζοντας είτε τον αριθμό των ίσων σε αξία κερμάτων (Συνθήκη I), είτε τη διαφορετική αξία των ισάριθμων κερμάτων (Συνθήκη II). Η πρώτη συνθήκη είχε σκοπό να ελέγξει αν τα παιδιά κατανοούν τη δραστηριότητα.

Η δεύτερη συνθήκη είχε σκοπό να ελέγξει αν κατανοούν το σχετικό μέγεθος των αριθμών. Αν τα παιδιά έπαιρναν υπόψη τους μόνο τον αριθμό των κερμάτων και αγνοούσαν την αξία τους, τότε θα κατέληγαν στη λανθασμένη εκτίμηση ότι και οι δύο σειρές των κερμάτων είχαν την ίδια αγοραστική δύναμη.



Συνθήκη II



Συνθήκη III

Στη μελέτη μας εισαγάγαμε και μία τρίτη συνθήκη. Στη συνθήκη αυτή, οι δύο σειρές διέφεραν και ως προς τον αριθμό και ως προς την αξία των κερμάτων. Για παράδειγμα, η μία σειρά είχε δύο εικοσάρικα και η άλλη τρία κέρματα της μίας δραχμής.

Στην περίπτωση αυτή, επειδή η διαφορά στη σχετική αξία των κερμάτων ήταν μεγάλη, κέρματα μίας

δραχμής και κέρματα είκοσι δραχμών, η σύγκριση ήταν εφικτή, χωρίς να χρειάζεται το παιδί να κάνει κάποιο είδος υπολογισμού. Αν, όμως, αγνοούσε τα σχετικά μεγέθη των αριθμών και επικεντρωνόταν στον αριθμό των κερμάτων, θα κατέληγε στο συμπέρασμα ότι τα τρία κέρματα της μίας δραχμής είχαν περισσότερη αξία από τα δύο εικοσάρικα.

Για να ελέγξουμε αν τα παιδιά κατανοούν την προσθετική σύνθεση των αριθμών, παίξαμε μαζί τους το παιχνίδι με τα ψώνια. Δείξαμε σε κάθε παιδί διάφορα παιχνίδια, για να διαλέξουν αυτά που θα ήθελαν να αγοράσουν. Τους δώσαμε στη συνέχεια πλαστικά κέρματα με τα οποία θα πλήρωναν στο ταμείο την αξία κάθε παιχνιδιού που θα διάλεγαν. Τα κέρματα που είχαν τα παιδιά ποίκιλλαν ως προς τις υποδιαιρέσεις τους. Σε κάποιες περιπτώσεις είχαν μονάχα κέρματα της μίας δραχμής. Σε άλλες περιπτώσεις είχαν συνδυασμούς κερμάτων μίας δραχμής και πέντε δραχμών, μίας δραχμής και δέκα δραχμών ή μίας δραχμής και είκοσι δραχμών. Τα χρήματα που διέθεταν τα παιδιά αρκούσαν για να πληρώσουν στο ταμείο. Για να κάνουν όμως την πληρωμή έπρεπε να συνδυάσουν κέρματα διαφορετικής αξίας. Για παράδειγμα, το παιδί είχε ένα δεκάρικο και πέντε νομίσματα της μίας δραχμής και έπρεπε να πληρώσει κάτι που έκανε δεκατρείς δραχμές. Αν καταλάβαινε ότι ο αριθμός δεκατρία ήταν η σύνθεση του δέκα και των τριών μονάδων, θα πλήρωνε δίνοντας το δεκάρικο και τις τρεις δραχμές. Αν, όμως, για το παιδί το δεκατρία ήταν απλά ένας αριθμός μετά το δώδεκα στην αριθμητική ακολουθία, τότε θα δυσκολευόταν κατά την πληρωμή.

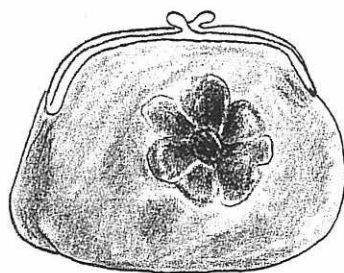
Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η ικανότητα για μέτρηση και η κατανόηση του σχετικού μεγέθους και της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών δεν είναι το ίδιο πράγμα. Αν και όλα τα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα ήξεραν να μετρούν, δεν τα κατάφεραν το ίδιο καλά στις δραστηριότητες σχετικού μεγέθους των αριθμών. Το 84% των μικρών παιδιών τα κατάφερε στην πρώτη συνθήκη, λιγότερα όμως από τα μισά έδωσαν τη σωστή απάντηση στις άλλες δύο συνθήκες. Η διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στην πρώτη και τις υπόλοιπες δύο συνθήκες αιτιολογείται από το γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση τα παιδιά μπορούσαν να αγνοήσουν την αξία των κερμάτων και μπορούσαν να τα κρίνουν με βάση τον αριθμό τους. Όταν όμως έπρεπε να πάρουν υπόψη τους την αξία των κερμάτων, όπως στη δεύτερη και στην τρίτη συνθήκη, η επίδοσή τους μειώθηκε. Χαρακτηριστικά είναι τα λάθη που έκαναν. Στην περίπτωση που είχαν να συγκρίνουν δύο κέρματα της μίας δραχμής με δύο δεκά-

4. Τα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν ως κέρματα ήταν πλαστικά, είχαν το ίδιο μέγεθος, για να αποφύγουμε εκτιμήσεις με βάση το μέγεθός τους, αλλά διέφεραν ως προς το χρώμα, ανάλογα με την αξία τους.

ρικά, πολλά παιδιά είπαν ότι και με τα δύο θα αγόραζαν τον ίδιο αριθμό καραμέλες, γιατί και τα δύο είχαν τον ίδιο αριθμό κερμάτων, δείχνοντας έτσι ότι δεν κατανοούσαν τη διαφορά στην αξία τους.

Όσον αφορά τις δραστηριότητες προσθετικής σύνθεσης των αριθμών, τα παιδιά δεν είχαν κανένα πρόβλημα να πληρώσουν, όταν τα κέρματα που είχαν ήταν όλα της μίας δραχμής. Η ευκολία των μικρών παιδιών θεωρούμε ότι αιτιολογείται από το γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή αρκούσε να γνωρίζουν να μετρούν σωστά ανά ένα. Όταν όμως έπρεπε να συνδυάσουν κέρματα διαφορετικών υποδιαιρέσεων, η επίδοσή τους μειώθηκε σημαντικά. Μόνο το ένα στα τέσσερα παιδιά τα κατάφερε, δείχνοντας να κατανοεί την προσθετική σύνθεση των αριθμών.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα «Ποιοι παράγοντες συμβάλλουν, ώστε να κατανοήσουν τα παιδιά την προσθετική σύνθεση των αριθμών», ζητήσαμε από τα παιδιά να λύσουν μια σειρά από απλά προβλήματα πρόσθεσης. Υποθέσαμε ότι μέσα από την πρόσθεση ενδέχεται να κατανοήσουν ότι ένας αριθμός είναι το άθροισμα δύο άλλων αριθμών, ότι ένας αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε δύο άλλους μικρότερους του. Για το λόγο αυτό δώσαμε στα παιδιά προβλήματα πρόσθεσης, που είχαν την εξής μορφή: «Στο πορτοφόλι σου μέσα έχεις δέκα δραχμές. Η μητέρα σου σου έδωσε ακόμα τρεις δραχμές. Πόσες δραχμές έχεις όλες μαζί;». Πρόκειται για ένα απλό πρόβλημα ένωσης ποσοτήτων, το οποίο όμως είχε την εξής ιδιαιτερότητα: Παρόλο που το παιδί είχε μπροστά του το πορτοφόλι και τα τρία κέρματα της μίας δραχμής, δεν μπορούσε να ανοίξει το πορτοφόλι και να μετρήσει τις δέκα δραχμές που περιείχε.



Πρόβλημα πρόσθεσης με κρυμμένο τον πρώτο προσθετέο



«Στο πορτοφόλι σου μέσα έχεις δέκα δραχμές.
Η μητέρα σου σου έδωσε ακόμα τρεις δραχμές.
Πόσες δραχμές έχεις όλες μαζί;»

Αυτό το κάναμε για να αναγκαστούν τα παιδιά να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα ως πρόβλημα πρόσθεσης και όχι απλής αριθμησης. Αν το παιδί είχε στη διάθεσή του τις δέκα δραχμές, απλώς θα μετρούσε αρχίζοντας από το 1, δηλαδή 1, 2, 3... 10 – 11, 12, 13. Εμείς, όμως, θέλαμε να ενθαρρύνουμε λύσεις, που θα άρχιζαν το μέτρημα από τον πληθάρημο του πρώτου προσθετέου, δηλαδή 10 – 11, 12, 13. Πιστεύουμε ότι το παιδί που ακολουθεί το δεύτερο τρόπο χειρίζεται το δέκα ως μία ποσότητα, την οποία μπορεί να ενώσει με άλλους αριθμούς. Η ικανότητα αυτή συνδέεται με την ικανότητα να συνθέτει κανείς αριθμούς από μικρότερους τους.

Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι τα δύο στα τρία παιδιά του δείγματός μας έλυσαν τα προβλήματα πρόσθεσης. Ωστόσο, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται όχι μόνο στο υψηλό ποσοστό επιτυχίας των μικρών παιδιών, αλλά και στις μεθόδους που ακολούθησαν για να λύσουν αυτά τα προβλήματα. Πολλά από τα παιδιά που έλυσαν τα προβλήματα πρόσθεσης μέτρησαν με τα δάκτυλά τους από το 1 έως το 10, παρά το γεγονός ότι ο πρώτος προσθετέος δεν ήταν ορατός, και στη συνέχεια πρόσθεσαν και τις τρεις δραχμές. Άλλα πάλι μέτρησαν ως το 10 κοιτάζοντας το πορτοφόλι και κουνώντας το κεφάλι τους, σαν να έβλεπαν τα 10 νομίσματα ή ακούμπησαν το πορτοφόλι 10 φορές, σαν να έπιαναν τα νομίσματα που περιείχε. Κάποια παιδιά μέτρησαν γρήγορα από το 1 έως το 10 και συνέχισαν προσθέτοντας τις τρεις δραχμές, ενώ τέλος το ένα στα πέντε παιδιά που έφεραν σε πέρας με επιτυχία τη δραστηριότητα, μέτρησε αρχίζοντας από τον πληθάρημο του πρώτου προσθετέου (10 – 11, 12, 13).

Όταν εξετάσαμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη λύση προβλημάτων πρόσθεσης και την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών, βρήκαμε ότι τα παιδιά που πέτυχαν στη δραστηριότητα με τα ψώνια ήταν κυρίως αυτά που ακολούθησαν την τελευταία μέθοδο λύσης των προβλημάτων πρόσθεσης.

Αυτό φανερώνει ότι τα παιδιά που θεωρούν κάθε αριθμό ως σύνολο, ως μία τάξη μεγέθους, κατανοούν την προσθετική σύνθεση των αριθμών. Το παιδί που χρειάζεται να μετρήσει από το 1, για να φτάσει στον αριθμό που του δίνεται, ενδέχεται να αντιμετωπίζει τον αριθμό αυτό απλώς ως ένα σημείο στην αριθμητική ακολουθία.

Πώς μπορούμε να βοηθήσουμε τα παιδιά να αντιληφθούν τη σύνθεση των αριθμών; Είναι αμφίβολο ότι θα βοηθηθούν, αν αυξήσουμε τις εμπειρίες σε σχέση με τη μέτρηση και την απαρίθμηση αντικειμένων αρχίζοντας από το 1. Άλλωστε, και στη δική

μας μελέτη όλα τα παιδιά ήταν ικανά στο να μετρούν και να απαριθμούν. Όταν ένα παιδί μετράει π.χ. 15 πούλιες, ενδέχεται να καταλαβαίνει μόνο ότι $n + 1$ μας δίνει τον επόμενο αριθμό στην ακολουθία, για παράδειγμα, $11 + 1$ ακόμα κάνει 12. Όταν το παιδί μετράει ανά ένα μία σειρά αντικειμένων, δε βλέπει να υπάρχει κανενός είδους οργάνωση των αριθμών σε δεκάδες. Μπορεί μιν να τους οργανώνει λεκτικά σε δεκάδες, αλλά συγχρόνως μπορεί να μη βλέπει ότι υπάρχει οργάνωση δεκάδων στα αντικείμενα που χειρίζεται. Ίσως για το λόγο αυτό το παιδί δυσκολεύεται να καταλάβει ότι μπορεί να πληρώσει π.χ. δώδεκα δραχμές με ένα δεκάρικο και δύο κέρματα της μίας δραχμής, γιατί, μέσα από την εμπειρία του να μετράει ανά ένα, βλέπει το δώδεκα ως το άθροισμα δώδεκα μονάδων, δηλαδή δώδεκα στοιχείων, και όχι του δέκα και του δύο, δηλαδή τριών στοιχείων.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι η μάθηση της αριθμητικής ακολουθίας είναι μιν μια σημαντική αρχή, ωστόσο το παιδί χρειάζεται να διανύσει αρκετό δρόμο για να μάθει πώς να μετράει, πότε να μετράει και ποιο είναι το μέγεθος και η σύνθεση κάθε αριθμού που μετράει. Το νηπιαγωγείο έχει τη δυνατότητα, μέσα από καταστάσεις προβληματισμού, να αξιοποιήσει και να εδραιώσει την ικανότητα των μικρών παιδιών να μετρούν και να μετατρέψει αυτή τους τη γνώση σε ένα χρήσιμο εργαλείο σκέψης. Τα αποτελέσματα της μελέτης μās έδειξαν ότι η εμπειρία που μπορεί να έχει το παιδί στην πρόσθεση μπορεί να το βοηθήσει να δει έναν αριθμό ως το άθροισμα δύο άλλων αριθμών. Τα προβλήματα πρόσθεσης που περιγράφουν την ένωση δύο συνόλων είναι εύκολα για τα παιδιά και παράλληλα συμβάλλουν στην κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης των αριθμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Cowan, R., Foster, C. M. & A. S. Al Zubaidi. 1993. Encouraging Children to Count. *British Journal of Developmental Psychology* 11: 411-420.

Fuson, K. 1988. *Children's Counting and Concepts of Number*. Νέα Υόρκη: Springer Verlag.

Gelman, R. & C. R. Gallistel. 1978. *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Kornilaki, E. & T. Nunes. 1996. What Supports the Understanding of our Numeration System? *The Abstracts of the Annual Conference of the British Psychological Society*, Oxford '96.

Nunes, T. & P. Bryant. 1996. *Children Doing Mathematics*. Οξφόρδη: Blackwell.

Piaget, J. 1965. *The Child's Conception Of Number*. Νέα Υόρκη: Norton.

Starkey, P. & R. Cooper. 1980. Perception of Numbers by Human Infants. *Science* 210: 1033-1034.

Starkey, P., Spelke, E. & R. Gelman. 1983. Detection of Intermodal Numerical Correspondence by Human Infants. *Science* 222: 179.

Wynn, K. 1992. Addition and Subtraction by Human Infants. *Nature* 358: 749-750.